Jørgen Erichsen

Periodiske kædebrøker eller talspektre

en introduktion til programmet "periodiskTalspektrum"

I artikelserien **Studier på grundlag af programmet SKALAGENERATOREN** kommer jeg bl.a. ind på begrebet kædebrøk og jeg giver en anvisning på, hvordan man ved hjælp af programmet kan generere periodiske kædebrøker. Jeg har imidlertid også skrevet et andet program, hvor man mere systematisk kan studere periodiske kædebrøker. En kædebrøk kan være en temmelig uhåndterlig størrelse at notere, og derfor bruger man gerne den kortere notationsform, der kaldes et talspektrum. Det bruger jeg også i mit program, og derfor kalder jeg det **periodiskTalspektrum**.

Jeg gentager her, hvad jeg skrev i ovennævnte artikel: En kædebrøk kan populært beskrives som en brøk, hvis nævner selv indeholder en brøk, hvis nævner igen indeholder en brøk . . . og så fremdeles. Enhver almindelig brøk og enhver decimalbrøk kan skrives som en kædebrøk, og omvendt kan enhver kædebrøk reduceres til en almindelig brøk eller en decimalbrøk. Hvis det oprindelige udtryk er rationelt, vil kædebrøken være endelig, er det irrationelt, vil kædebrøken være uendelig.

I opstillingen herunder ses til venstre kædebrøken for 31/53, og derefter ser vi, hvordan kædebrøken nedefra reduceres, så den ender med at blive 31/53:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{4}{9}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{9}{22}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{22}{31}} = \frac{31}{53}$$

Som sagt kan man notere kædebrøken i den kortere form, der kaldes et talspektrum. Her anføres kun første led på hver af brøkens linjer (andet led, der fungerer som tæller i næste brøk i kæden, er jo overalt 1). Ovenstående eksempel skrives sådan:

$$31 / 53 = [0: 1, 1, 2, 2, 4]$$

Det første tal, efterfulgt af et kolon, angiver brøkens eventuelt heltallige del; i dette tilfælde er det 0. I dette tilfælde er brøken rationel og kædebrøken / spektret endeligt. Hvis brøken er irrationel vil kædebrøken / spektret fortsætte i det uendelige, men i visse tilfælde er det den samme talfølge, der gentages (ligesom vi kender det fra periodiske decimalbrøker), og det er disse periodiske tilfælde, det handler om her

Det enkleste tilfælde, nemlig en sekvens af lutter 1-taller, fremkommer, når forholdet er lig med *det gyldne snit*, hvis talværdi tilnærmelsesvis er 0,6180339887. Spektret ser altså i dette tilfælde sådan ud: [0: 1, 1, 1, 1, 1 · · · ·], og den tilsvarendekædebrøk ser vi her:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1 \; \cdots \; \cdots}}}}}$$

Nu kunne det være interessant at finde de tal, hvis spektrum består af lutter 2-taller, 3-tallet, 4-taller osv., og videre kunne vi begynde at lede efter *sammensatte* periodiske spektre som eksempelvis:

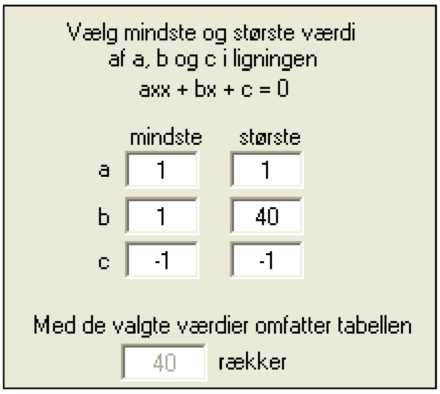
[0: 1, 2, 1, 2, 1, 2 · · · ·]
[0: 2, 3, 2, 3, 2, 3 · · · ·]
[0: 1, 1, 2, 1, 1, 2 · · · ·]
[0: 1, 1, 3, 1, 1, 3 · · · ·]

Udgangspunktet for en sådan eftersøgning er, at spektret vil være periodisk, når brøken kan fremstilles som et tal, hvori der indgår en kvadratrod. Det er netop tilfældet med *det gyldne snit*, der jo kan skrives som ($\sqrt{5}$ –1) / 2 = 0,618034 [1]. Det er imidlertid det samme som at sige, at spektret vil være periodisk, når tallet er løsning til en andengradsligning – dog kun hvis løsningen er irrationel, dvs. kan fremstilles som et tal, hvori der indgår en kvadratrod. Vi skal altså systematisk undersøge spektret for løsningerne til andengradsligningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

og 'systematisk' betyder her, at vi undersøger alle løsninger, hvor a, b eller c gennemløber et bestemt forløb, enten hver for sig eller i kombination med hinanden. Håbet er, at vi derved kan påvise en sammenhæng mellem perioden og de tre koefficienter a, b og c.

Til det formål har jeg skrevet programmet **periodiskTalspektrum**. Brugerfladen består i al sin enkelthed af nogle tekstbokse, hvor man indtaster den mindste og højeste værdi af koefficienterne a, b og c, samt af en tabel, hvor resultatet vises. Illustrationen til venstre herfor viser tekstboksene. I eksemplet holdes a og c konstant, mens b varierer fra 1 til 40. Programmet udregner automatisk hvor mange forskellige løsninger, der fremkommer med de valgte værdier. Det kan være nyttigt at vide, før man klikker på knappen BEREGN. Hvis man f.eks. lader alle tre koefficienter variere mellem 1 og 40, vil programmet beregne 40^3 = 64000 ligninger, og det vil nok være lidt uoverskueligt at skulle gennemsøge så mange løsninger. Men i øvrigt kan tabellen slet ikke håndtere et så stort tal, og det vil man i givet fald få en meddelelse om. Man vil ligeledes få en meddelelse, hvis man har indtastet en mindsteværdi, som er større end den tilsvarende størsteværdi, og i det hele taget er programmet "idiotsikret" mod indtastninger, som vil få programmet til at gå ned. Programmet afviser således alle indtastninger, som ikke er tal, minustegnet dog undtaget.



Den næste illustration viser begyndelsen af tabellen, som den ser ud når indtastninger er som i ovenstående eksempel – og som man kan se, får man i dette tilfælde netop genereret de 40 simpleste periodiske talspektre eller kædebrøker, dvs. perioden kan skrives som [b, b, b, b . . .]. Men først lidt om betydningen af tabellens i alt otte kolonner:

Den første kolonne er blot en nummerering af rækkerne. Derefter følger værdierne af a, b og c samt en fremstilling af ligningen på det aktuelle trin af forløbet (det er ikke muligt at notere potenstallet som hævet skrifttype; i programmeringssproget skriver man i stedet x^2, men i tabellen har jeg valgt at skrive xx). I den næste kolonne finder man ligningens diskriminant, som er afgørende for

[1] *Det gyldne snit* kalder man det, når et linjestykke deles i to ulige store stykker, således at det mindre stykke forholder sig til det større stykke, som dette forholder sig til hele linjestykket. Sætter vi det udelte linjestykke lig med 1, og kalder vi det større stykke a, er dette udtrykt i ligningen: a / (1 – a) = 1 / a eller $a^2 + a - 1 = 0$. Denne andengradsligning har løsningerne: a = ($\sqrt{5}$ –1) / 2 = 0,618034 og a = – ($\sqrt{5}$ –1) / 2 = –0,618034

forståelsen af sammenhængen mellem koefficienterne og perioden[2]. Derefter følger ligningens løsning, og endelig kan man så i den sidste kolonne se talspektret alias kædebrøksfremstillingen.

	a	b	c	ligning	diskrim.	løsning	spektrum (kædebrøksfremstilling)
1	1	1	-1	xx + x - 1	5	0.618033988749895	0 : 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
2	1	2	-1	xx + 2x - 1	8	0.414213562373095	0 : 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,
3	1	3	-1	xx + 3x - 1	13	0.302775637731995	0 : 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,
4	1	4	-1	xx + 4x - 1	20	0.236067977499790	0 : 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4,
5	1	5	-1	xx + 5x - 1	29	0.192582403567252	0 : 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6,
6	1	6	-1	xx + 6x - 1	40	0.162277660168380	0 : 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6,
7	1	7	-1	xx + 7x - 1	53	0.140054944640259	0 : 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7,
8	1	8	-1	xx + 8x - 1	68	0.123105625617661	0 : 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8,
9	1	9	-1	xx + 9x - 1	85	0.109772228646444	0 : 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9,
10	1	10	-1	xx + 10x - 1	104	0.099019513592785	0 : 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10,
11	1	11	-1	xx + 11x - 1	125	0.090169943749475	0 : 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11,
12	1	12	-1	xx + 12x - 1	148	0.082762530298219	0 : 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12,
13	1	13	-1	xx + 13x - 1	173	0.076473218982953	0 : 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13,
14	1	14	-1	xx + 14x - 1	200	0.071067811865476	0 : 14, 14, 14, 14, 14, 14,
15	1	15	-1	xx + 15x - 1	229	0.066372975210778	0 : 15, 15, 15, 15, 15, 15,
16	1	16	-1	xx + 16x - 1	260	0.062257748298549	0 : 16, 16, 16, 16, 16, 16,

Talspektret / kædebrøksfremstillingen udregnes ved hjælp en algoritme, der kort kan beskrives som en variant af den bekendte Euklids algoritme. Programmet opererer med op til 16 decimaler, men alligevel vil fejlen på sidste decimal efterhånden vokse, så perioden fra et bestemt trin ikke længere vises korrekt. Hvornår det sker afhænger af størrelsen af de tal, hvoraf perioden er sammensat. Jo større disse tal er, desto hurtigere vokser fejlen, og det er forklaringen på, at der i kolonnen med spektret efterhånden medtages færre og færre tal. I eksemplet gentages perioden dog tilstrækkeligt mange gange til, at vi kan være sikre på, den er korrekt. Perioden er her overalt *monoton*, dvs. den består kun af ’et tal.

Sætter vi a lig med ÷1, men lader b og c være som i første eksempel, får vi genereret denne tabel:

	a	b	c	ligning	diskrim.	løsning	spektrum (kædebrøksfremstilling)
1	-1	1	-1	-xx + x - 1	-3	ingen løsning	
2	-1	2	-1	-xx + 2x - 1	0	rationel løsning	
3	-1	3	-1	-xx + 3x - 1	5	2.618033988749890	2 : 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
4	-1	4	-1	-xx + 4x - 1	12	3.732050807568880	3 : 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1
5	-1	5	-1	-xx + 5x - 1	21	4.791287847477920	4 : 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1
6	-1	6	-1	-xx + 6x - 1	32	5.828427124746190	5 : 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4,
7	-1	7	-1	-xx + 7x - 1	45	6.854101966249680	6 : 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 6,
8	-1	8	-1	-xx + 8x - 1	60	7.872983346207420	7 : 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 7,
9	-1	9	-1	-xx + 9x - 1	77	8.887482193696060	8 : 1, 7, 1, 7, 1, 7, 1, 7, 1, 7, 1, 7, 1, 7, 1, 10,
10	-1	10	-1	-xx + 10x - 1	96	9.898979485566360	9 : 1, 8, 1, 8, 1, 8, 1, 8, 1, 8, 1, 8, 1, 8, 1, 6,
11	-1	11	-1	-xx + 11x - 1	117	10.908326913196000	10 : 1, 9, 1, 9, 1, 9, 1, 9, 1, 9, 1, 9, 1, 9, 1, 10,
12	-1	12	-1	-xx + 12x - 1	140	11.916079783099600	11 : 1, 10, 1, 10, 1, 10, 1, 10, 1, 10, 1, 10, 1, 10,
13	-1	13	-1	-xx + 13x - 1	165	12.922616289332600	12 : 1, 11, 1, 11, 1, 11, 1, 11, 1, 11, 1, 11, 1,
14	-1	14	-1	-xx + 14x - 1	192	13.928203230275500	13 : 1, 12, 1, 12, 1, 12, 1, 12, 1, 12, 1, 12, 1,
15	-1	15	-1	-xx + 15x - 1	221	14.933034373659300	14 : 1, 13, 1, 13, 1, 13, 1, 13, 1, 13, 1, 14,
16	-1	16	-1	-xx + 16x - 1	252	15.937253933193800	15 : 1, 14, 1, 14, 1, 14, 1, 14, 1, 14, 1, 15,

Perioden kan i dette tilfælde skrives som [1, b-2]. Usikkerheden begynder her allerede at gøre sig gældende fra 7. række (der slutter med 1, 6 i stedet for det korrekte 1, 5), men perioden gentages stadig tilstrækkeligt mange gange til, at vi kan være sikre på, den er korrekt. Læg mærke til, at lig-

[2] Jeg minder om, at størrelsen $b^2 - 4ac$, der optræder i forbindelse med løsningen af en andengradsligning, kaldes diskriminanten. Løsningen findes som bekendt som $-a/2 \pm \sqrt{b^2/4a^2 - c/a}$, og idet det, der står under kvadratrodstegnet også kan skrives $(b^2 - 4ac)/4ac^2$, er det klart, at det alene er størrelsen $b^2 - 4ac$, altså diskriminanten, der afgør, om løsningen er rationel eller irrationel, eller der måske slet ingen løsning er (nemlig hvis 4ac er større end b^2, og diskriminanten dermed bliver negativ).

ningen ikke har nogen løsning, når diskriminanten er negativ (1. række), og at løsningen er rationel, og når diskriminanten er 0 (2. række). Læg også mærke til, at perioden alene afhænger af løsningens decimaldel, dvs. det gør ingen forskel, hvad der står i den heltallige del. Vi ser et eksempel herpå i 3. linje, hvor vi genkender decimalerne fra det gyldne snit 0.618033988749890, men nullet foran decimaltegnet er nu ombyttet med et 2-tal. Vi ser også, at diskriminanten i begge tilfælde er den samme, og der er generelt en éntydig forbindelse mellem diskriminanten og perioden (eksempler: til perioden [1] svarer diskriminanten 5, til perioden [1, 2] svarer diskriminanten 12, til perioden [1, 3] svarer diskriminanten 21).

	mindste	største
a	1	40
b	0	0
c	-1	-1

En anden kombination af a, b og c, der afslører en række relativt simple periodiske spektre, ses til venstre herfor. Det er let at forstå, hvorfor c skal være negativ. Ligningen ser jo i dette tilfælde sådan ud: ax2 – c = 0, og løsningen er $\sqrt{c/a}$; hvis c havde været positiv, ville udtrykket under kvadratrodstegnet blive negativt, og det giver som bekendt ingen mening.

Tabellen ses i næste illustration. Læg mærke til, at løsningerne fordeler sig i grupper, der er begrænset af de tilfælde, hvor a er et kvadrattal, og løsningen følgelig er rationel. Læg videre mærke til, at inden for hver gruppe afsluttes perioden med det samme tal, og at dette tal i hvert tilfælde er identisk med kvadratet på diskriminanten i den nærmest foregående rationelle løsning. Jeg nævner dette som et eksempel, hvad man skal lægge mærke til, når man leder efter mønstre og sammenhænge. I denne tabel begynder perioden i øvrigt hver gang på andet led. Ligesom vi kender det fra periodiske decimalbrøker, kan der gå et eller flere tal forud for den egentlig periode. Eksempelvis hedder perioden i 21. række [1, 1, 2, 1, 1, 8]. 2-tallet, som afslutter den ufuldendte 3. periode afsluttes, er tydeligvis en af de tidligere omtalte uundgåelige fejl.

	a	b	c	ligning	diskrim.	løsning	spektrum (kædebrøksfremstilling)
1	1	0	-1	xx - 1	4	rationel løsning	
2	2	0	-1	2xx - 1	8	0.707106781186548	0 : 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,
3	3	0	-1	3xx - 1	12	0.577350269189626	0 : 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2,
4	4	0	-1	4xx - 1	16	rationel løsning	
5	5	0	-1	5xx - 1	20	0.447213595499958	0 : 2, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4,
6	6	0	-1	6xx - 1	24	0.408248290463863	0 : 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2,
7	7	0	-1	7xx - 1	28	0.377964473009227	0 : 2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1,
8	8	0	-1	8xx - 1	32	0.353553390593274	0 : 2, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 5,
9	9	0	-1	9xx - 1	36	rationel løsning	
10	10	0	-1	10xx - 1	40	0.316227766016838	0 : 3, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6,
11	11	0	-1	11xx - 1	44	0.301511344577764	0 : 3, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3,
12	12	0	-1	12xx - 1	48	0.288675134594813	0 : 3, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2,
13	13	0	-1	13xx - 1	52	0.277350098112615	0 : 3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 2,
14	14	0	-1	14xx - 1	56	0.267261241912424	0 : 3, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1,
15	15	0	-1	15xx - 1	60	0.258198889747161	0 : 3, 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 7,
16	16	0	-1	16xx - 1	64	rationel løsning	
17	17	0	-1	17xx - 1	68	0.242535625036333	0 : 4, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8,
18	18	0	-1	18xx - 1	72	0.235702260395516	0 : 4, 4, 8, 4, 8, 4, 8, 4, 8, 4,
19	19	0	-1	19xx - 1	76	0.229415733870562	0 : 4, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, 2,
20	20	0	-1	20xx - 1	80	0.223606797749979	0 : 4, 2, 8, 2, 8, 2, 8, 2, 8, 2, 8, 2,
21	21	0	-1	21xx - 1	84	0.218217890235992	0 : 4, 1, 1, 2, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 2,
22	22	0	-1	22xx - 1	88	0.213200716355610	0 : 4, 1, 2, 4, 2, 1, 8, 1, 2, 4, 2, 1, 8, 1, 2, 4, 3,
23	23	0	-1	23xx - 1	92	0.208514414057075	0 : 4, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 9,
24	24	0	-1	24xx - 1	96	0.204124145231932	0 : 4, 1, 8, 1, 8, 1, 8, 1, 8, 1, 8, 1, 8, 1, 9,
25	25	0	-1	25xx - 1	100	rationel løsning	
26	26	0	-1	26xx - 1	104	0.196116135138184	0 : 5, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10,
27	27	0	-1	27xx - 1	108	0.192450089729875	0 : 5, 5, 10, 5, 10, 5, 10, 5, 10,
28	28	0	-1	28xx - 1	112	0.188982236504614	0 : 5, 3, 2, 3, 10, 3, 2, 3, 10, 3, 2, 3,
29	29	0	-1	29xx - 1	116	0.185695338177052	0 : 5, 2, 1, 1, 2, 10, 2, 1, 1, 2, 10, 2, 1, 1, 2, 10, 2,
30	30	0	-1	30xx - 1	120	0.182574185835055	0 : 5, 2, 10, 2, 10, 2, 10, 2, 10, 2, 10, 2,

Som standard ordnes (sorteres) listen efter løbenumrene (1. kolonne), men du kan også vælge at ordne den, så den følger den numeriske orden i en af de andre kolonner. Du skal blot dobbeltklikke med musen et eller andet sted i den pågældende kolonne. Det kan f.eks. i nogle tilfælde være nemmere at få øje på et princip bag perioden, hvis man følger en af koeeficienter numerisk; her skal du altså dobbeltklikke på en af kolonnerne a, b, eller c. Du kan til enhver tid vende tilbage til den oprindelige rækkefølge, ved at dobbeltklikke i 1. kolonne. Bemærk, at det ikke tjener noget formål at sortere efter kolonnerne 'ligning', 'løsning' eller 'spektrum'; rækkefølgen bliver ganske vist ændret, men ikke på en måde, der i denne forbindelse giver nogen mening.

	mindste	største
a	1	12
b	1	12
c	-12	-1

Her følger et eksempel på, hvordan du kan så sammenligne talspektrene for en bestemt diskriminant, idet du sorterer tabellen, så diskriminanterne kommer i numerisk rækkefølge. Vi vælger de indstillinger, der ses til venstre herfor. Det resulterer i en tabel med 12·12·12 = 1728 rækker, og mange af de 1728 ligninger vil have samme diskriminant. Vi fokuserer på diskriminanten 73. Den forekommer ikke færre end 25 gange, dog er nogle af dem gengangere fra de tilfælde, hvor koefficienterne kan forkortes (bemærk at ligningen i disse tilfælde er tilføjet 'fork'):

150	6	2	-12	3xx + x - 6 (fork)	73	1.257333957552920	1 : 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 4,
702	6	5	-2	6xx + 5x - 2	73	0.295333645443128	0 : 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2,
974	2	7	-3	2xx + 7x - 3	73	0.386000936329383	0 : 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1
1002	6	7	-1	6xx + 7x - 1	73	0.128666978776461	0 : 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 8,
129	9	1	-2	9xx + x - 2	73	0.419111319184307	0 : 2, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2,
987	3	7	-2	3xx + 7x - 2	73	0.257333957552922	0 : 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 4,
1376	8	10	-6	4xx + 5x - 3 (fork)	73	0.443000468164691	0 : 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 4,
720	12	5	-1	12xx + 5x - 1	73	0.147666822721564	0 : 6, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 8,
228	12	2	-6	6xx + x - 3 (fork)	73	0.628666978776461	0 : 1, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1
338	2	3	-8	2xx + 3x - 8	73	1.386000936329380	1 : 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1
1350	6	10	-8	3xx + 5x - 4 (fork)	73	0.590667290886255	0 : 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2
650	2	5	-6	2xx + 5x - 6	73	0.886000936329383	0 : 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 2
1404	12	10	-4	6xx + 5x - 2 (fork)	73	0.295333645443128	0 : 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2,
416	8	3	-2	8xx + 3x - 2	73	0.346500234082346	0 : 2, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 4,
675	3	5	-4	3xx + 5x - 4	73	0.590667290886255	0 : 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2
388	4	3	-4	4xx + 3x - 4	73	0.693000468164691	0 : 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 4
1164	12	9	-12	4xx + 3x - 4 (fork)	73	0.693000468164691	0 : 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 4
688	4	5	-3	4xx + 5x - 3	73	0.443000468164691	0 : 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 4,
114	6	1	-3	6xx + x - 3	73	0.628666978776461	0 : 1, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1
1300	4	10	-12	2xx + 5x - 6 (fork)	73	0.886000936329383	0 : 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 2
577	1	5	-12	xx + 5x - 12	73	1.772001872658770	1 : 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3,
937	1	7	-6	xx + 7x - 6	73	0.772001872658765	0 : 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3,
776	8	6	-8	4xx + 3x - 4 (fork)	73	0.693000468164691	0 : 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 4
75	3	1	-6	3xx + x - 6	73	1.257333957552920	1 : 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 4,
38	2	1	-9	2xx + x - 9	73	1.886000936329380	1 : 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 2

Vi bemærker i dette eksemplet, at perioden i hvert tilfælde kan beskrives ved sekvensen {1, 2, 3, 1, 7, 1, 3, 2, 1}, idet denne sekvens optræder i forskellige permutationer.

Men hvis du nu tror, at du har fundet en almengyldig regel, bliver du skuffet, når du eksempelvis fra samme tabel sammenligner de talspektre, der er fælles om diskriminanten 65. Her kan perioden i nogle tilfælde beskrives ved sekvensen {3, 1, 3}, men i andre tilfælde handler det om sekvensen {1, 7, 1}:

350	2	3	-7	2xx + 3x - 7	65	1.265564437074640	1 : 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3,
128	8	1	-2	8xx + x - 2	65	0.441391109268659	0 : 2, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3,
961	1	7	-4	xx + 7x - 4	65	0.531128874149275	0 : 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 2,
100	4	1	-4	4xx + x - 4	65	0.882782218537319	0 : 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 2,
1402	10	10	-4	5xx + 5x - 2 (fork)	65	0.306225774829855	0 : 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3,
1000	4	7	-1	4xx + 7x - 1	65	0.132782218537319	0 : 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 2,
718	10	5	-1	10xx + 5x - 1	65	0.153112887414928	0 : 6, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 2,
300	12	3	-12	4xx + x - 4 (fork)	65	0.882782218537319	0 : 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 2,
200	8	2	-8	4xx + x - 4 (fork)	65	0.882782218537319	0 : 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 2,
1324	4	10	-10	2xx + 5x - 5 (fork)	65	0.765564437074637	0 : 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1,
701	5	5	-2	5xx + 5x - 2	65	0.306225774829855	0 : 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3,
415	7	3	-2	7xx + 3x - 2	65	0.361589839164182	0 : 2, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 4,
601	1	5	-10	xx + 5x - 10	65	1.531128874149270	1 : 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 2,
662	2	5	-5	2xx + 5x - 5	65	0.765564437074637	0 : 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1,
986	2	7	-2	2xx + 7x - 2	65	0.265564437074637	0 : 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3,
50	2	1	-8	2xx + x - 8	65	1.765564437074640	1 : 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1,

Hvorfor denne forskel? Kan man overhovedet generelt beskrive perioden alene ud fra koefficienterne og diskriminanten? Du kan sikkert få svar på disse og andre spørgsmål, hvis du søger på internettet, men meningen med dette program er jo at give dig et værktøj, så du selv kan gå på opdagelse efter de lovmæssigheder, der knytter sig til dannelsen af periodiske kædebrøker.

Nogle samler på frimærker – men det kan også være ganske spændende at samle på periodiske kædebrøker! Kan du f.eks. finde perioden [5, 3, 1] ?

God jagt!