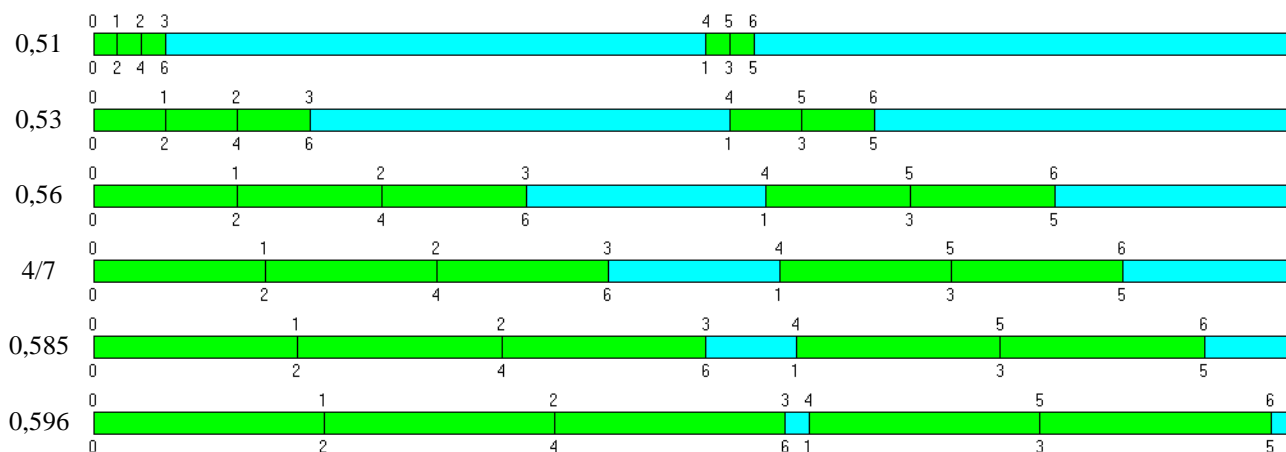


5. Betingelsen for at to skalaer har samme indfoldede orden – et spørgsmål om Farey-brøker

Man skal ikke arbejde længe med SKALAGENERATOREN, før man bemærker, at forskellige snit kan resultere i skalaer med samme indfoldede orden. Vi skal nu undersøge betingelsen for, at dette er tilfældet. Lad os begynde med at se på nogle eksempler, hvor betingelsen er umiddelbart indlysende (tallet til venstre for skalaen er snittet, tallene under skalaen er den indfoldede orden, og tallene over skalaen er blot en løbende nummerering):



Figur 5.1

Vi har her seks forskellige skalaer, der alle er sammensat af 7 intervaller. Den indfoldede orden er den samme, og det gælder følgelig også intervalldifferenserne, der for de grønne intervaller vedkommende er $+2$ og for de blå $\div 5$. I fjerde eksempel, hvor nævneren er lig med antallet af intervaller, er inddelingen ækvidistant. I femte eksempel er snittet identisk med Musikkens gyldne Snit (dog kun med en tilnærmelse), og inddelingen svarer til den lydiske skala. (se sidste kapitel)

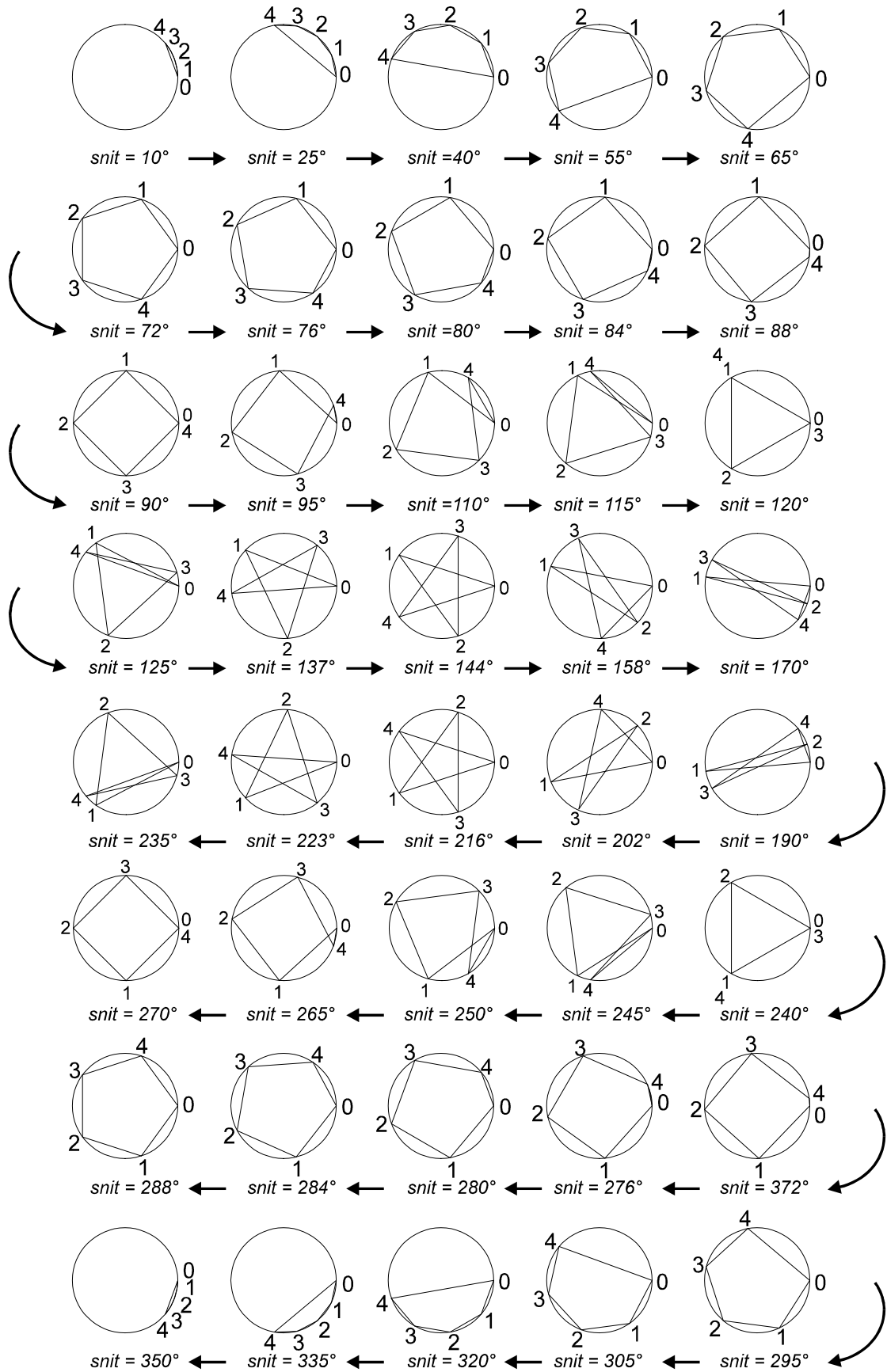
Idéen i opstillingen er, at de grønne intervaller gradvist vokser i størrelse, samtidig med at de blå intervaller aftager. Forud har der åbenbart været en situation, hvor de grønne intervaller har udstrækningen nul, dvs. hvor skalaen kun har en enkelt deling, som tydeligvis vil være beliggende præcis midt på, og i denne situation må snittet være $0,5 = 1/2$. Omvendt vil der efter sidste eksempel være en situation, hvor det er de blå intervaller, som forsvinder, så antallet af intervaller reduceres fra 7 til 5, og denne situation indtræffer, når snittet har værdien $0,6 = 3/5$.

Vi kan heraf konkludere, at betingelsen for at den indfoldede orden er

$$0, 2, 4, 6, 1, 3, 5$$

er, at snittet er større end $1/2$ og mindre end $3/5$. Men hvordan finder vi den generelt gældende betingelse? Vi kan nærme os svaret ved at bruge den funktion i SKALAGENERATOREN, som hedder "variabelt snit". For ikke at gøre det unødvendigt kompliceret, bør vi sætte antallet af delinger lavt, og derefter skal vi følge forløbet mens snittet vokser fra 0 til 1.

Som illustration har jeg imidlertid den gang valgt en tegning, som jeg allerede lavede før jeg havde udviklet programmet SKALAGENERATOREN, og som er baseret på den metode, der i programmet kaldes "kordemodellen". Her følger vi i en serie "øjebliksbilleder", hvordan 4 intervaller ændrer form. Undtagelsesvis udtrykkes snittet her i grader, begyndende ved 10° og sluttende ved 350° . Springene er valgt, så forløbet kommer til at fremtræde så jævnt som muligt, samtidig med at de karakteristiske grænsetilfælde (regulære 3-, 4- og 5-kanter) medtages – se figuren næste side:



Figur 5.2

For at gøre det lettere at iagttage den symmetri, der består mellem første og anden halvdel af forløbet, går dette frem til 180° fra venstre mod højre, og derefter fra højre mod venstre. Selve tilfældet 180° er ikke medtaget. Retningen er tydeligt markeret ved pile. Tallene rundt om cirklen er den indfoldede orden.

Jeg vil foreslå, at man til en begyndelse følger, hvordan punkt 1 bevæger sig rundt på cirklen, altså man flytter øjet fra billede til billede. På tilsvarende måde kan man dernæst prøve at følge punkterne 2, 3 og 4, og man kan herunder begynde at overveje, under hvilke betingelser et punkt begynder at "overhale" et andet punkt – med det resultat at rækkefølgen, dvs. den tonale orden, ændres. Endelig kan man også på dette indledende trin gøre sig nogle overvejelser over den symmetri, der består mellem figurerne før og efter 180° . Det skal hertil bemærkes, at gradtallene er valgt således, at de korresponderende figurer i første og anden halvdel af forløbet er eksplementvinkler (dvs. når vinklen i den ene figur er v° , er vinklen i den korresponderende figur $360^\circ - v^\circ$).

Jeg vil nu kommentere forløbet således som det udvikler sig fra række til række: Første række viser forløbet frem til det tilfælde, hvor der første gang dannes en regulær 5-kant. Her er restintervallet større end snittet. I anden række ser vi, hvorledes restintervallet gradvis bliver mindre end snittet for til sidst at blive lig 0, hvorved figuren forvandles til en regulær 4-kant. Under hele dette forløb, dvs. inden for grænseområdet mellem 0 og $1/4$ (0° og 90°), har hhv. den indfoldede orden og intervaldifferenserne været:

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ \text{og}\ 1\ 1\ 1\ 1\ \div 4$$

Tredie række viser forløbet mellem de grænsetilfælde, der udgøres af den regulære 4-kant og den regulære 3-kant. De mellemliggende figurer er igen 5-kanter; men her har punktet 4 nu placeret sig mellem 0 og 1, hvorved den indfoldede orden ændrer sig til:

$$0\ 1\ 4\ 2\ 3\ \text{og}\ 1\ 3\ \div 2\ 1\ 3$$

Grænseområdet for dette tilfælde ligger mellem $1/4$ og $1/3$ (90° og 120°). Vi har her at gøre med *tre* forskellige intervalstørrelser, dvs. det handler ikke længere om *polære* skalaer – og eftersom det er dem, fokus er rettet imod, kunne vi også sige, at vi her er kommet ind i et "forbudt område".

Efter at snittet 120° ($= 1/3$) er passeret opstår en ny fordeling af delepunkterne, karakteriseret ved at hhv. den indfoldede orden og intervaldifferenserne nu er:

$$0\ 3\ 1\ 4\ 2\ \text{og}\ 3\ \div 2\ 3\ \div 2\ 3$$

Med femte række er vi inde i forløbets anden halvdel, der kort kan beskrives som spejlvendt gentagelse af den første. Hvor $1/2$ før var *øvre* grænse for skalaerne med sidstnævnte indfoldede orden, bliver $1/2$ nu *nedre* grænse for de skalaer, der har den *omvendte* indfoldede orden, ligesom intervaldifferenserne har skiftet fortegn:

$$0\ 2\ 4\ 1\ 3\ \text{og}\ 2\ 2\ \div 3\ 2\ \div 3$$

Videre finder vi, at hvor den *nedre* grænse før var $1/3$ (120°), bliver den *øvre* grænse nu $2/3$ (240°). Det er i øvrigt inden for dette område vi finder den fra musikken kendte pentatone skala (udtrykt i grader ligger Musikkens gyldne Snit tæt på 210°).

Med sjette række er vi igen kommet ind i et "forbudt område", dvs. et område med tre forskellige intervalstørrelser:

$$0\ 3\ 2\ 1\ 4\ \text{og}\ 3\ \div 1\ \div 1\ 3\ \div 5$$

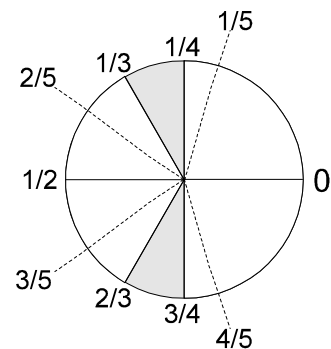
Figurerne her korresponderer med figurerne i tredje række; hvor grænseværdierne før var $1/3$ og $1/2$ (120° og 180°), er de nu $1/2$ og $2/3$ (180° og 240°).

Endelig korresponderer figurerne i hhv. syvende og ottende række med figurerne i hhv. anden og første række; hvor grænseværdierne før var 0 og $1/4$ (0° og 90°), er de nu $3/4$ og 1 (0° og 270°), og den indfoldede orden samt intervallforskellene er nu:

$$0 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \quad \text{og} \quad 2 \div 1 \div 1 \div 1 \div 1$$

Konklusionen af disse iagttagelser er, at der omkring hvert af de snit, der medfører en lighed, og som dermed illustreres af en regulær polygon, hvorfor jeg også kalder disse snit *regulære* (altså i dette eksempel $1/5$, $2/5$, $3/5$ og $4/5$), er et område, hvor der dannes bi-intervalliske skalaer med samme indfoldede orden som det aktuelle regulære snit. Disse områder er defineret ved en nedre og en øvre grænse, som i hvert tilfælde kan skrives som en brøk, hvis nævner er mindre end 5. Det har jeg her samlet i en tabel, og til højre for tabellen har jeg illustreret det med en tegning. De regulære snit er på tegningen markeret ved stiplede linier; de gråtonede cirkeludsnit er de "forbudte" områder, hvor der ikke forekommer bi-intervalliske skalaer. Af hensyn til sammenligningen er også 0 og 1 skrevet som brøker i tabellen.

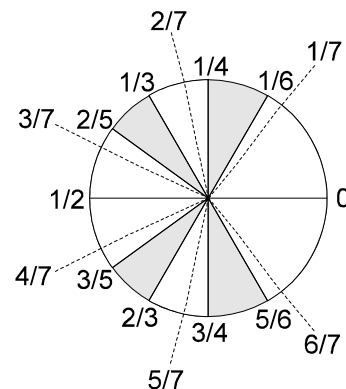
nedre grænse	regulær deling	øvre grænse
0/1	1/5	1/4
1/3	2/5	1/2
1/2	3/5	2/3
3/4	4/5	1/1



Figur 5.3

Selv om man måske nok allerede her begynder at ane en sammenhæng mellem brøkerne, er det for tidligt at begynde at generalisere, så derfor vil jeg nu vise to andre eksempler, hvor antallet af intervaller er henholdsvis 7 og 17. I det første eksempel, fig.5.4, bemærker vi, at der nu optræder fire "forbudte" områder, og hvis vi følger forløbet i SKALAGENERATOREN, vil vi se, at der ved grænseovergangene dannes 6-kanter, 5-kanter, 4-kanter og 3-kanter, hvortil kommer den med symmetriaksen sammenfaldende diagonal, "2-kanter".

nedre grænse	regulær deling	øvre grænse
0/1	1/7	1/6
1/4	2/7	1/3
2/5	3/7	1/2
1/2	4/7	3/5
2/3	5/7	3/4
5/6	6/7	1/1



Figur 5.4

Figuren i det næste eksempel er genereret i et program, jeg har skrevet med speciel henblik på dette emne, og som jeg kalder FAREY-BROEKER – et navn jeg redegør for lidt længere fremme. Af tekniske grunde er brøkerne for de regulære delinger her anbragt inden for cirkelperiferien.

Hvad vi her har fået dannet er en fortløbende og efter voksende størrelse ordnet sekvens af alle ægte uforkortelige brøker hvis nævner er lig med eller mindre end 2, 3, 4, 5 . . . osv. Det er disse brøker, vi genkender i de foregående tabeller og figurer, idet det dog dér kun er nabobrøkerne til de regulære delinger, der er aktuelle.

Først senere fandt jeg ud af, at disse talfølge er kendt under navnet *Farey-brøker* (af hhv. første, anden, tredje osv. orden), efter John Farey, som allerede havde offentliggjort førnævnte ligning i *Philosophical Magazine* i 1816! Farey var egentlig landmåler, og i det nævnte tidsskrift har han skrevet om så forskellige emner som geologi, astronomi, matematik – og musik! Opdagelsen vakte dog først opmærksomhed da den franske matematiker Cauchy (1789-1857) mange år senere gjorde opmærksom på artiklen i *Philosophical Magazine*, og foreslog navnet Farey-brøker – et navn som jeg respektfuldt har videreført til mit før omtalte program!

Dermed er vi omsider nået frem til, at *betingelsen for at forskellige snit kan resultere i skalaer med n intervaller og med samme indfoldede orden, er, at snittet ligger inden for de grænseværdier, som er defineret ved de to Farey-brøker af n 'te orden, som ligger nærmest ved det rationelle snit $(n \cdot \gamma \setminus 1) / n$ (jf. afsnittet i kap.4 om beregningen af rationelle tilnærmelser til et givet irrationelt snit).*

Her følger et eksempel: Det til $\sqrt{5}$ svarende normalsnit har talværdien 0,236068. En af de bi-intervalliske skalaer, der afledes af dette snit, har 9 intervaller og den indfoldede orden er:

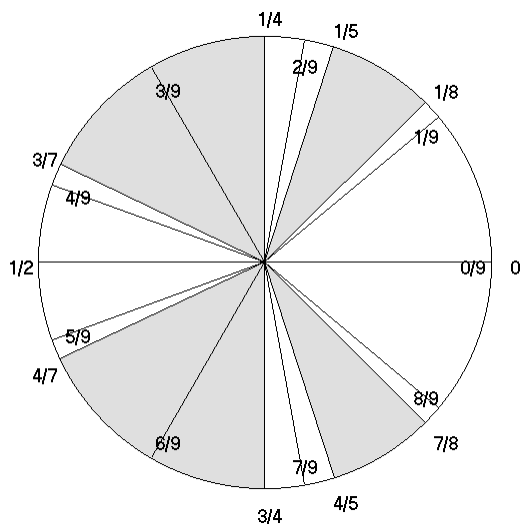
$$0, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4$$

Vi vil finde grænserne for de snit, der resulterer i skalaer med samme indfoldede orden.

Først finder vi ved hjælp af ovennævnte formel tælleren til den nærmeste rationelle tilnærmelse til det valgte snit, idet det er givet at nævneren er 9:

$$(9 \cdot 0,236068) \setminus 1 = 2$$

Den nærmeste rationelle tilnærmelse er altså $2/9$. I stedet for nu at udregne Farey-brøkerne af niende orden, vil jeg bruge programmet FAREY-BROEKER, hvorved vi får de skalarelevante data fremstillet grafisk:



Figur 5.7

Her kan vi umiddelbart se, at grænserne er defineret ved brøkerne $1/5$ og $1/4$. Dette får vi også bekræftet, hvis vi i SKALAGENERATOREN indtaster snittet 0,236068, sætter antallet af delinger til 9, klikker på KØR, og derefter ved hjælp af funktionen 'Variabelt snit' undersøger, hvornår den indfoldede orden skifter (det sker, når snittet til den ene side er $0,2 (= 1/5)$, til den anden side er $0,25 (= 1/4)$). Når antallet af "forbudte" områder her ikke er større end i fig.6.4, skyldes det at snittene $3/9$ og $6/9$ kan forkortes til hhv. $1/3$ og $2/3$.

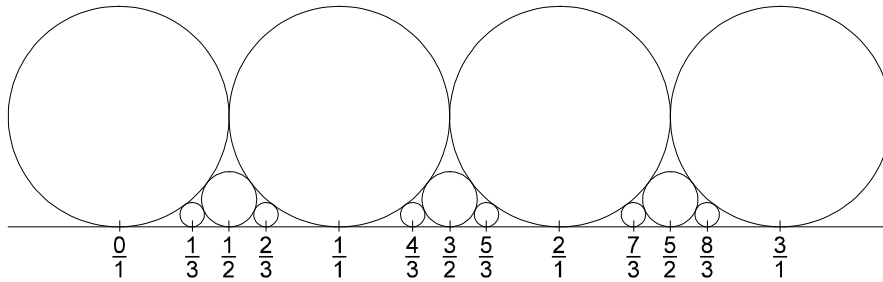
Jeg vil kort omtale endnu en bemærkelsesværdig sammenhæng, der består mellem mellem Farey-brøkerne to og to, og som man nemt kan efterprøve i opstillingen fig.5.6. Det viser sig nemlig, at krydsproduktet mellem tæller og nævner i to nabobrøker a_1/b_1 og a_2/b_2 er forbundne ved denne ligning:

$$a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2 = 1$$

I forbindelse figurerne 5.3, 5.4, 5.5 og 5.7 gælder denne ligning (hvad man også nemt kan afprøve):

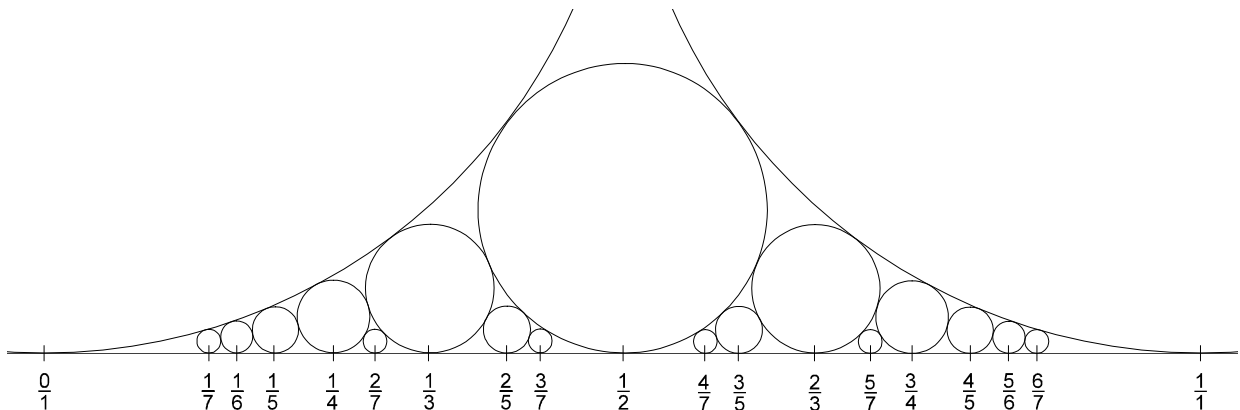
$$b \cdot A - a \cdot B = 1$$

Endelig vil jeg omtale en smuk geometrisk demonstration af Farey-brøkerne, som skyldes Lester R. Ford, og som derfor er kendt under navnet *Ford-cirkler*. Ideén er, at man lader rækken af hele tal repræsentere ved en række cirkler, således som det er vist i den næste figur, hvor de fire store cirkler repræsenterer tallene 0, 1, 2 og 3. Hvis vi nu udfylder rummet mellem cirklerne og tallinien med nye cirkler, men således at disse dels berører tallinien, dels berører hinanden (man kan tale om optimal udfyldning af det ledige rum), så vil disse cirklers berøringspunkt med tallinien være defineret ved Farey-brøkerne:



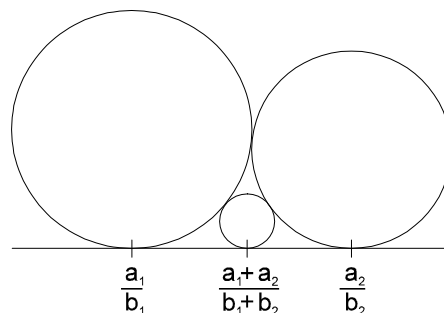
Figur 5.8

Fig.5.8 illustrerer Farey-brøkerne af 3. orden. Den næste figur illustrerer Farey-brøkerne af 7. orden (sammenlign med figurerne 5.4 og 5.6). Bemærk at figuren er stærkt forstørret i forhold til den foregående; af de to store cirkler, der repræsenterer tallene 0 og 1, ses vi nu kun et lille udsnit:



Figur 5.9

Endnu skal tilføjes, at uanset hvor på tallinien man anbringer cirkler på denne måde, så gælder det, at hvis to sammenstødende cirkler rører tallinien ved hhv. a_1/b_1 og a_2/b_2 , så vil den cirkel, som kan placeres imellem dem, berøre tallinien ved $(a_1 + a_2) / (b_1 + b_2)$, således som det er illustreret her:



Figur 5.10