Dette er den fjerde af fem artikler under den fælles overskrift
Studier på grundlag af programmet SKALAGENERATOREN
(forfatter: Jørgen Erichsen)

4. Snittets kædebrøksfremstilling og dets konvergenter

Vi vender nu tilbage til tabellen på SKALAGENERATOREN's Skærm B, for at se nærmere på de fire sidste kolonner. Som eksempel vil vi vælge snittet 31/53 = 0,584906 (dette snit spille en vis rolle i den musikalske fortolking, og valget er således ikke tilfældigt).

No	store interval størrelse	lille interval størrelse	store interv. antal	lille interv. antal	antal interv. ialt	ombyt	spektrum (kædebrøk)	☐ alle konvergenter	pil
1	1	0	1	0	1	×	1	1 / 1	▲
2	0,58490566	0,41509434	1	1	2	×	1	1 / 2	▼
3	0,41509434	0,16981132	2	1	3				
4	0,24528302	0,16981132	2	3	5	×	2	3 / 5	▲
5	0,16981132	0,07547170	5	2	7				
6	0,09433962	0,07547170	5	7	12	×	2	7 / 12	▼
7	0,07547170	0,01886792	12	5	17				
8	0,05660377	0,01886792	12	17	29				
9	0,03773585	0,01886792	12	29	41				
10	0,01886792	0,01886792	12	41	53	×	4	31 / 53	

Figur 4.1

Fra gennemgangen af den algoritme til beregning af delingssekvensen, som er beskrevet i kap.2, husker vi, at der på visse steder af forløbet sker en ombytning af det store og den lille interval. Denne ombytning kan vi i ovenstående eksempel følge i de to første kolonner, men den er også markeret med et kryds i den kolonne, hvor der som overskrift står "ombyt". Det viser sig nu, at ombytningen er nært forbundet med snittets kædebrøksfremstilling. Her tør jeg ikke forudsætte, at alle ved hvad en kædebrøk er, så derfor først en kort forklaring:

En kædebrøk kan populært beskrives som en brøk, hvis nævner selv indeholder en brøk, hvis nævner igen indeholder en brøk . . . og så fremdeles. Enhver almindelig brøk og enhver decimalbrøk kan skrives som en kædebrøk, og omvendt kan enhver kædebrøk reduceres til en almindelig brøk eller en decimalbrøk. Hvis det oprindelige udtryk er rationelt, vil kædebrøken være endelig, er det irrationelt, vil kædebrøken være uendelig.

I opstillingen herunder ses til venstre kædebrøken for 31/53 (det snit der er valgt i eksemplet fig.4.1), og i de efterfølgende opstillinger ser vi, hvordan kædebrøken nedefra reduceres, så den ender med at blive 31/53:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{4}{9}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{9}{22}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{22}{31}} = \frac{31}{53}$$

En mere pladsbesparende måde at skrive ovennævnte kædebrøk på er følgende opsætning, hvor man kun anfører første led i hver linje (andet led, der fungerer som tæller i næste brøk i kæden, er overalt 1); denne opsætning kaldes også brøkens *spektrum*. Det første tal, efterfulgt af et semikolon, angiver brøkens eventuelt heltallige del; i dette tilfælde er det 0:

$$31 / 53 = [0; 1, 1, 2, 2, 4]$$

Det vi nu skal lægge mærke til er, at nævnerne i kædebrøksfremstillingen subs. elementerne i spektret trin for trin svarer til afstanden mellem afmærkningerne i tabellens ”ombyt”-kolonne. Med andre ord afspejler kædebrøken eller spektret, hvor det store og det lille interval bytter plads. Denne afstand udregner programmet løbende og noterer den i næste kolonne – som altså dermed bliver en fremstilling af snittets kædebrøk eller spektrum. Samtidig udregnes konvergenten, altså den tilnærmede værdi til snittet på det pågældende trin af forløbet (konvergenterne og deres beregning er omtalt i kap.1 og 2). Her benyttes den metode med heltaltsdivision, der er omtalt i kap.2 [1]:

$$\text{tæller} = \text{snit} \cdot \text{nævner} \setminus 1$$

Konvergenterne finder vi i næstsidste kolonne. I første omgang udregnes kun konvergenterne på de pladser, der svarer til kædebrøkens ellers spektrets elementer. Dermed får vi nemlig en række *oscillerende konvergenter*, sådedes som vi så det i fig.1.3, hvor det handlede om det gyldne snit og Fibonacci-rækken. At konvergenterne er oscillerende, altså skiftevis større og mindre end snittet, er symboliseret ved de skiftevis opad- og nedadpegende pile i sidste kolonne. Som det fremgår af fig. 4.1, kan man også vælge at få udregnet konvergenterne på hvert trin i tabellen (man skal så sætte et flueben i checkboksen ”alle”).

*   *   *

Vi har nu set flere eksempler på, at SKALAGENERATOREN kan bruges til meget andet end til at generere skalaer med. Ved hjælp af programmet kan vi anskueliggøre sammenhænge fra vidt forskellige grene af matematikken, og mens vi er ved emnet kædebrøker, vil vi nu nærmere undersøge en speciel type af disse, nemlig de *periodiske kædebrøker*. Derved forstås kædebrøker, hvor det samme tal gentages uforandret. Et særligt kendt eksempel er igen det gyldne snit (0,618034), hvis kædebrøksfremstilling består af lutter 1-taller:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1 \cdots}}}}}$$

eller skrevet som spektrum: [0; 1, 1, 1, 1, 1 · · ··]

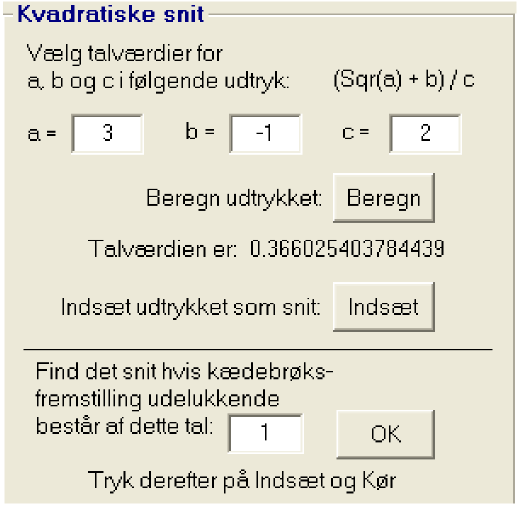
Nu kunne det være interessant at finde de tal, hvis spektrum består af lutter 2-taller, 3-tallet, 4-taller, for ikke at tale om *sammensatte* periodiske spektre som eksempelvis

[0; 1, 2, 1, 2, 1, 2 · · · ·]
[0; 2, 3, 2, 3, 2, 3 · · · ·]
[0; 1, 1, 2, 1, 1, 2 · · · ·]
[0; 1, 1, 3, 1, 1, 3 · · · ·]

Dertil kan SKALAGENERATOREN også bruges. Fælles for alle periodiske spektre er nemlig, at tallet er kvadratisk, dvs. kan skrives som $(\sqrt{a}-b)/c$. Et sådan tal er netop det gyldne snit, der som vi så i 1. kap. er løsningen på ligningen x = ($\sqrt{5}$ -1) / 2. For at undersøge de periodiske spektre mere systematisk har jeg tilføjet en funktion til SKALAGENERATOREN, hvor formlen kan udregnes for enhver værdi af a, b og c, og hvor resultatet derefter kan indsættes som snit. Når man på SKALAGENERATOREN’s Skærm B klikker på knappen ”Åben kvadratiske snit” kommer denne lille

[1] Eksemplet kunne forlede til den opfattelse, at konvergenten kan findes som forholdet mellem antallet af små intervaller (tælleren) og summen af store og små intervaller (nævneren), for det passer her med de fire første konvergenter. Men det er blot et tilfælde.

REN's Skærm B klikker på knappen "Åben kvadratiske snit" kommer denne lille "regnemaskine" til syne:



Figur 4.2

Bruger vi de tre værdier, som er valgt i fig.4.2, og åbner vi dernæst tabellen, vil vi opdage, at vi har fundet det tal, der har det periodiske spektrum [0; 2, 1, 2, 1, 2, 1 · · · ·]

No	store interval størrelse	lille interval størrelse	store interv. antal	lille interv. antal	antal interv. ialt	ombyt	spektrum (kædebrøk)	☐ alle konvergenter	pil
1	1	0	1	0	1				
2	0,63397460	0,36602540	1	1	2	X	2	1 / 2	▲
3	0,36602540	0,26794919	2	1	3	X	1	1 / 3	▼
4	0,26794919	0,09807621	3	2	5				
5	0,16987298	0,09807621	3	5	8	X	2	3 / 8	▲
6	0,09807621	0,07179677	8	3	11	X	1	4 / 11	▼
7	0,07179677	0,02627944	11	8	19				
8	0,04551733	0,02627944	11	19	30	X	2	11 / 30	▲
9	0,02627944	0,01923789	30	11	41	X	1	15 / 41	▼
10	0,01923789	0,00704156	41	30	71				
11	0,01219633	0,00704156	41	71	112	X	2	41 / 112	▲
12	0,00704156	0,00515478	112	41	153	X	1	56 / 153	▼
13	0,00515478	0,00188678	153	112	265				
14	0,00326800	0,00188678	153	265	418	X	2	153 / 418	▲
15	0,00188678	0,00138122	418	153	571	X	1	209 / 571	▼
16	0,00138122	0,00050556	571	418	989				
17	0,00087566	0,00050556	571	989	1560	X	2	571 / 1560	▲
18	0,00050556	0,00037010	1560	571	2131	X	1	780 / 2131	▼
19	0,00037010	0,00013546	2131	1560	3691				
20	0,00023463	0,00013546	2131	3691	5822	X	2	2131 / 5822	▲
21	0,00013546	0,00009917	5822	2131	7953	X	1	2911 / 7953	▼

Figur 4.3

Læg mærke til, at der i dette tilfælde består en simpel forbindelse konvergenterne. Betegner vi to efter hinanden følgende brøker som henholdsvis n_1 / d_1 og n_2 / d_2, gælder det nemlig at

$$n_1 \cdot d_2 \; = \; n_2 \cdot d_1 + 1$$

For at se, om det er muligt at få øje på et mønster i forholdet mellem formlen og spektret, har jeg bl.a. systematisk gennemregnet denne version af formlen:

$$(\sqrt{a}+1) / 2$$

for samtlige værdier af *a* mellem 1 og 50, og resultatet har jeg opstillet i den tabel, som følger her. Den heltallige del af spektret er udeladt, og på de steder, hvor talværdien bliver rationel, er rubrikken med spektret tom, da et sådant tal jo ifølge sagens natur ikke har et periodisk spektrum:

formel	talværdi	spektrum
(√1 +1)/2	1	
(√2 +1)/2	1.207107	4, 1
(√3 +1)/2	1.366025	2, 1
(√4 +1)/2	1.5	
(√5 +1)/2	1.618034	1
(√6 +1)/2	1.724745	1, 2, 1, 1
(√7 +1)/2	1.822876	1, 4, 1, 1
(√8 +1)/2	1.914213	1, 10, 1, 1
(√9 +1)/2	2	
(√10 +1)/2	2.081139	12, 3
(√11 +1)/2	2.158312	6, 3
(√12 +1)/2	2.232051	4, 3
(√13 +1)/2	2.302776	3
(√14 +1)/2	2.370829	2, 1, 2, 3
(√15 +1)/2	2.436492	2, 3
(√16 +1)/2	2.5	
(√17 +1)/2	2.561553	1, 1, 3
(√18 +1)/2	2.621320	1, 1, 1, 1, 1, 3
(√19 +1)/2	2.679450	1, 2, 8, 2, 1, 3
(√20 +1)/2	2.736068	1, 2, 1, 3
(√21 +1)/2	2.791288	1, 3
(√22 +1)/2	2.845208	1, 5, 2, 5, 1, 3
(√23 +1)/2	2.897916	1, 8, 1, 3
(√24 +1)/2	2.949490	1, 18, 1, 3
(√25 +1)/2	3	

formel	talværdi	spektrum
(√26 +1)/2	3.049510	20, 5
(√27 +1)/2	3.098076	10, 5
(√28 +1)/2	3.145751	6, 1, 6, 5
(√29 +1)/2	3.192582	5
(√30 +1)/2	3.238613	4, 5
(√31 +1)/2	3.283882	3, 1, 1, 10, 1, 1, 3, 5
(√32 +1)/2	3.328427	3, 22, 3, 5
(√33 +1)/2	3.372281	2, 1, 2, 5
(√34 +1)/2	3.415476	2, 2, 2, 5
(√35 +1)/2	3.458040	2, 5
(√36 +1)/2	3.5	
(√37 +1)/2	3.541381	1, 1, 5
(√38 +1)/2	3.582207	1, 1, 2, 1, 1, 5
(√39 +1)/2	3.622499	1, 1, 1, 1, 1, 5
(√40 +1)/2	3.662278	1, 1, 1, 24, 1, 1, 1, 5
(√41 +1)/2	3.701562	1, 2, 2, 1, 5
(√42 +1)/2	3.740370	1, 2, 1, 5
(√43 +1)/2	3.778719	1, 3, 1, 1, 12, 1, 1, 3, 1, 5
(√44 +1)/2	3.816625	1, 4, 2, 4, 1, 5
(√45 +1)/2	3.854102	1, 5
(√46 +1)/2	3.891165	1, 8, 5, 3, 5, 8, 1, 5
(√47 +1)/2	3.927827	1, 12, 1, 5
(√48 +1)/2	3.964102	1, 26, 1, 5
(√49 +1)/2	4	
(√50 +1)/2	4.035534	28, 7

Her fornemmer vi nok en vis form for mønster, men det er langt fra tilstrækkeligt til, at vi uden videre kan slutte os til, hvordan en bestemt periode fremkommer. Denne version af formlen dækker naturligvis også kun en bestemt delmængde af de periodiske spektre. Den omfatter f.eks. de *ulige* monotone spektre (altså de spektre der består af lutter 1-taller, 3-taller, 5-taller osv.), hvorimod vi leder forgæves efter de *lige* monotone spektre.

Imidlertid har vi allerede i kap.2 set, at spektret bestående af lutter 2-taller fremkommer, når snittet er $\sqrt{2}-1$. Dog kunne vi lige så godt bare have skrevet $\sqrt{2}$ (eller mere generelt $\sqrt{2} \pm n$), for decimaldelen vil under alle omstændigheder være den samme. En nærmere undersøgelse vil afsløre, at de *lige* monotone spektre fremkommer, når ovennævnte formel reduceres, så den alene består af en bestemt serie af kvadratrødder. I den næste tabel viser jeg de 6 første led i denne serie. Det er ikke svært at gennemskue, hvad det næste led i rækken er, og dermed er det også muligt at udtrykke princippet i en formel – men en formel der altså kun kan bruges på denne specielle serie). Prøv selv!.

kvadratisk form	talværdi	spektrum
√2	0,414214	2
√5	0,236068	4
√10	0,162278	6
√17	0,123106	8
√26	0,099020	10
√37	0,082763	12

Skulle man få lyst til at tage udfordringen op, er det også muligt at finde en *fælles* formel for de lige og de ulige monotone spektre. I det hele taget er dette et spændende område for matematiske skattejægere. SKALAGENERATOREN tilbyder i denne forbindelse et godt værktøj. Men her må vi igen huske, at irrationelle tal kun kan beregnes og indsættes som tilnærmede værdier. På et eller andet tidspunkt af forløbet vil elementerne i kædebrøken eller spektret, ikke længere være korrekte. Man bør derfor ikke drage konklusioner om perioden, med mindre den i tabellen optræder mindst to gange.

Der findes imidlertid også en anden metode, hvormed man systematisk og mere effektivt kan eftersøge tal med periodiske spektre. Jeg vil ikke komme ind på denne metode her, men vil henvise til min artikel *Periodiske kædebrøker* og til programmet af samme navn. En enkelt funktion fra dette program har jeg dog medtaget i SKALAGENERATOREN. Som man kan se i fig.4.2 kan man søge efter det snit, hvis kædebrøksfremstilling udelukkende består af et givet tal (altså er monoton). Dette tal indtaster man, hvorefter programmet sørger for resten.

*   *   *

Når kædebrøkesudviklingen er monoton periodisk, er der en klar forbindelse mellen konvergenterne. Betragt engang dette eksempel, hvor snittet er her 0,236068 og perioden er 4:

No	store interval størrelse	lille interval størrelse	store interv. antal	lille interv. antal	antal interv. ialt	ombyt	spektrum (kædebrøk)	☐ alle konvergenter	pil
1	1	0	1	0	1				
2	0,76393202	0,23606798	1	1	2				
3	0,52786405	0,23606798	1	2	3				
4	0,29179607	0,23606798	1	3	4	×	4	1 / 4	▲
5	0,23606798	0,05572809	4	1	5				
6	0,18033989	0,05572809	4	5	9				
7	0,12461180	0,05572809	4	9	13				
8	0,06888371	0,05572809	4	13	17	×	4	4 / 17	▼
9	0,05572809	0,01315562	17	4	21				
10	0,04257247	0,01315562	17	21	38				
11	0,02941686	0,01315562	17	38	55				
12	0,01626124	0,01315562	17	55	72	×	4	17 / 72	▲
13	0,01315562	0,00310562	72	17	89				
14	0,01005000	0,00310562	72	89	161				
15	0,00694438	0,00310562	72	161	233				
16	0,00383876	0,00310562	72	233	305	×	4	72 / 305	▼

Figur 4.4

Her bemærker vi for det første, at tælleren for en given konvergent er lig med den foregående konvergents nævner (altså ganske som det er tilfældet med det gyldne snits konvergenter), og videre bemærker vi, at den før nævnte sammenhæng mellem konvergenterne: $n_1 \cdot d_2 = n_2 \cdot d_1 + 1$, også gælder her.

Nævneren er per definition lig med antallet af intervaller i den pågældende skala, og spørgsmålet er nu, om vi kan se et mønster i den måde, denne række udvikler sig på. Betragt den følgende opstilling, hvor jeg har opløst hver af rækkens tal i to led, der begge selv, som række betragtet, er sammensat af rækkens tal (de to sidste led er ikke medtaget i fig.4.4):

$$\begin{aligned} 1 \cdot 4 + 0 &= 4 \\ 4 \cdot 4 + 1 &= 17 \\ 17 \cdot 4 + 4 &= 72 \\ 72 \cdot 4 + 17 &= 305 \\ 305 \cdot 4 + 72 &= 1292 \\ 1292 \cdot 4 + 305 &= 5473 \end{aligned}$$

Når perioden er defineret (i dette tilfælde som 4), og vi kender et led i rækken, finder vi det næste led ved at gange perioden med det aktuelle led og addere det foregående led. Det kan vi udtrykke i denne formel, hvor s_n står for det søgte led, s_{n-1} står for det aktuelle led, og s_{n-2} står for det foregående led:

$$s_n = s_{n-1} \cdot 4 + s_{n-2}$$

Det viser sig imidlertid, at formlen gælder for *alle* delingsforløb, hvortil der svarer en monoton periodisk kædebrøk. Kalder vi perioden p, kan formlen altså skrives som:

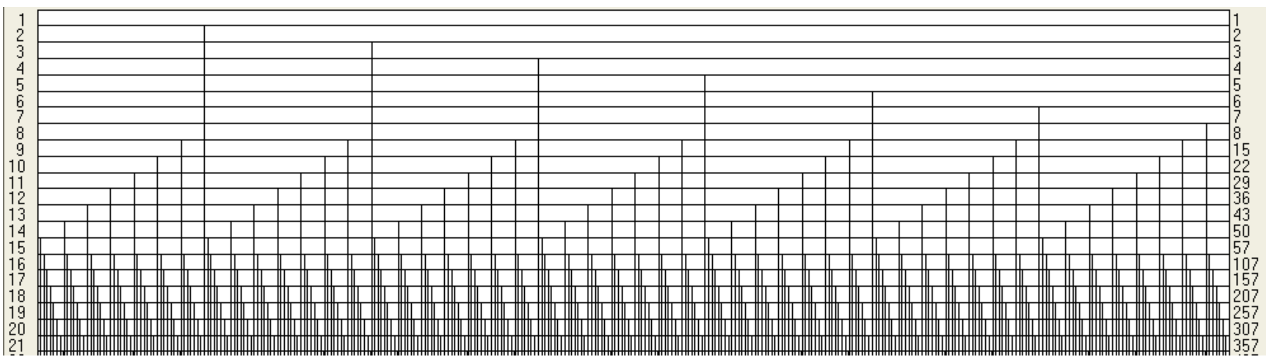
$$s_n = s_{n-1} \cdot p + s_{n-2}$$

I det tilfælde, hvor p = 1, er det slet og ret den ”klassiske” definition på Fibonacci-rækken. Vi har med andre ord igen fundet en formel, der også gælder for Fibonacci-rækkens ”søskende”, og den nye formel er tilmed mere anvendelig, end den vi fandt i kap.1, fordi vi undgår at skulle inddrage størrelsen ”antallet af *større* intervaller”.

Uden støtte i SKALAGENERATOREN kan vi altså nu som endnu et eksempel finde konvergenterne, når perioden er 7:

beregning af nævneren	konvergenterne
$1 \cdot 7 + 0 = 7$	1 / 7
$7 \cdot 7 + 1 = 50$	7 / 50
$50 \cdot 7 + 7 = 357$	50 / 357
$357 \cdot 7 + 50 = 2549$	357 / 2549
$2549 \cdot 7 + 357 = 18200$	2549 / 18200
$18200 \cdot 7 + 2549 = 129949$	18200 / 129949

Efterfølgende kan vi så ved hjælp af SKALAGENERATOREN få bekræftet, at det er korrekt. Vi vil da også få at se, hvordan det periodiske forløb afspejler sig i den grafiske fremstilling af skalaerne:



Figur 4.5

Det er de trappeformede forløb, vi skal lægge mærke til. Hver af disse forløb består af 7 trin (svarende til perioden), og de bevæger sig skiftevis mod højre og mod venstre (svarende til den ombytning, der i tabellen også er markeret med pile). Hvert nyt forløb gentager sig inden for hvert enkelt trappetrin i det foregående forløb. På figuren kan vi kun følge de første tre forløb, men hvis vi kunne zoome ind på detaljerne, ville vi se, at de fortsætter i det uendelige.

*   *   *

Helt så nemt går det ikke, når perioden ikke er monoton – for ikke at tale om de tilfælde hvor kædebrøksudviklingen slet ikke er periodisk. Ganske vist kan vi i begge disse tilfælde stadig bruge den sidste formel, men vi må nu erstatte p (perioden) med det til enhver tid aktuelle tal i kædebrøken, og desuden skal formlen nu anvendes på tæller og nævner hver for sig.

I denne udformning er metoden kendt som *Wallis algoritme*[2]. Den formuleres sædvanligvis sådan: Lad N_{k-2}, N_{k-1} og samt D_{k-2}, D_{k-1} og D_k være hhv. tællerne (latin: **N**ominator) og nævnerne (latin: **D**enominator) i tre på hinanden følgende konvergenter. Lad endvidere g_k være det led i kædebrøken, der svarer til den k'te konvergent. Der gælder da følgende sammenhæng:

$$N_k = g_k \cdot N_{k-1} + N_{k-2} \qquad \text{og} \qquad D_k = g_k \cdot D_{k-1} + D_{k-2}$$

Som eksempel vil vi afprøve Wallis algoritme på det snit, vi senere skal lære at kende som *musikkens gyldne snit*: $\log_2(3/2) = 0{,}5849625$. Spektret eller kædebrøken er i dette tilfælde aperiodisk. Begyndelsen af forløbet fremstilles i SKALAGENERATOREN således:

No	store interval størrelse	lille interval størrelse	store interv. antal	lille interv. antal	antal interv. ialt	ombyt	spektrum (kædebrøk)	☐ alle konvergenter	pil
1	1	0	1	0	1	×	1	1 / 1	▲
2	0,58496250	0,41503750	1	1	2	×	1	1 / 2	▼
3	0,41503750	0,16992500	2	1	3				
4	0,24511250	0,16992500	2	3	5	×	2	3 / 5	▲
5	0,16992500	0,07518750	5	2	7				
6	0,09473751	0,07518750	5	7	12	×	2	7 / 12	▼
7	0,07518750	0,01955001	12	5	17				
8	0,05563749	0,01955001	12	17	29				
9	0,03608748	0,01955001	12	29	41	×	3	24 / 41	▲
10	0,01955001	0,01653747	41	12	53	×	1	31 / 53	▼
11	0,01653747	0,00301254	53	41	94				
12	0,01352493	0,00301254	53	94	147				
13	0,01051239	0,00301254	53	147	200				
14	0,00749986	0,00301254	53	200	253				
15	0,00448732	0,00301254	53	253	306	×	5	179 / 306	▲
16	0,00301254	0,00147478	306	53	359				
17	0,00153776	0,00147478	306	359	665	×	2	389 / 665	▼
18	0,00147478	0,00006298	665	306	971				

Figur 4.6

Vi vil beregne konvergenten til 7. led (hvor der i spektret står 5). Ombytter vi nu diverse indices med tal, ser de to formler således ud:

$$N_7 = g_7 \cdot N_6 + N_5 \qquad \text{og} \qquad D_7 = g_7 \cdot D_6 + D_5$$

Vi opsøger nu de respektive tal i tabellen og indsætter dem i formlen:

$$N_7 = 5 \cdot 31 + 24 = 179 \qquad \text{og} \qquad D_7 = 5 \cdot 53 + 41 = 306$$

Som vi ser, stemmer resultatet overens med SKALAGENERATOREN's udregning: konvergenten er på dette trin 179 / 306.

[2] Opkaldt efter John Wallis (1616-1703), professor i matematik ved universitetet i Oxford; var bl.a. Newtons lærer.

Når vi tolker forløbet som som en *delingssekvens*, kan vi imidlertid aflede tælleren direkte af nævneren, således som vi tidligere har set eksempler på, nemlig ved at at gange nævneren med snittet og bortkaste den heltallige det (dvs. udføre en heltalsdivision med 1). I eksemplet finder vi da tælleren sådan:

$$(306 \cdot 0{,}5849625) \setminus 1 = 179$$