

1. Fibonacci-rækken i ny belysning – det gyldne snit som skalagenerator

Fibonacci-rækken, opkaldt efter den italienske matematiker Leonardo Fibonacci der levede i 1200-tallet, defineres sædvanligvis som den række der fremkommer, når man begyndende med to 1-taller fortløbende lader det næste led i rækken være lig med summen af de to foregående led:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610 \dots$$

Rækken blev længe betragtet som et kuriosum uden særlig betydning for talteorien, og unægtelig var den opgave Fibonacci stiller i bogen *Liber Abaci* (frit oversat *Bogen om Regnekunsten*; titlen hentyder til abacussen eller kuglerammen, den tids lommeregner), og som gav anledning til rækken, også noget af et kuriosum – det drejer sig nemlig om hvor mange kaniner man på et givet tidspunkt vil have, når udgangspunktet er 2 kaniner, og det antages at de avler et nyt kuld hver måned, samtidig med at denne praksis fortsættes af deres børn, børnebørn, oldebørn osv.!

Siden har man imidlertid opdaget, at rækken faktisk optræder mange steder i naturen – måske ikke lige i forbindelse med kaniners formering, men dog i forbindelse med visse insekters formering og i forbindelse med placeringen af solsikkens kerner, fyrrekoglens skæl, bladknopperne på en lang række træer og urter mm.. Det rent matematiske studium af Fibonacci-rækken har også ydet væsentlige bidrag til talteorien, og der findes endog et tidsskrift, *The Fibonacci Quarterly*, som udelukkende er helliget dette emne.

Fibonacci-rækken er nært forbundet med *Det gyldne snit* – herefter forkortet GS – der geometrisk er beskrevet ved at et linjestykke deles i to dele, således at den mindre del forholder sig til den større del, som denne forholder sig til hele linjestykket. Sagt på en anden måde er den større del mellemproportional mellem den mindre del og det udelte linjestykke. GS symboliseres normalt ved det græske bogstav ϕ (phi), men da de følgende kapitler kommer til at handle om snit forstået som generelt begreb, vil jeg fra starten indføre et fælles symbol, det græske bogstav γ (gamma) – og ϕ kan således betragtes som et specielt tilfælde af γ .

Sætter vi det udelte linjestykke lig med 1, er GS beskrevet ved ligningen:

$$(1 - \gamma) / \gamma = \gamma \quad \text{eller} \quad \gamma^2 + \gamma - 1 = 0$$

Denne andengradsligning har to løsninger:

$$\gamma = (\sqrt{5} - 1) / 2 = 0,618034 \quad \text{og} \quad \gamma = -(\sqrt{5} - 1) / 2 = -0,618034$$

Den positive løsning er illustreret med denne figur:

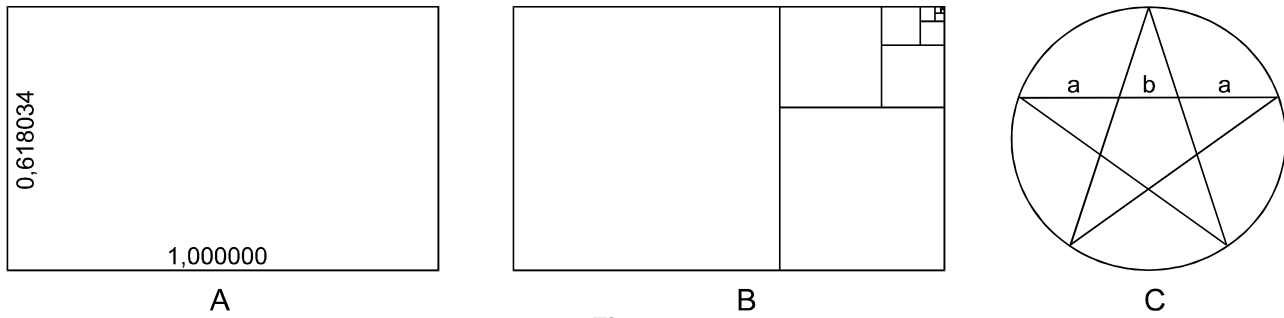


Figur 1.1

Den negative løsning er figurens spejlbillede i punktet 0.

En geometrisk konstruktion af GS er allerede beskrevet i Euklids *Elementerne* (ca. 300 f.Kr.). Snittet er dog først og fremmest kendt for sine æstetiske kvaliteter. Som *det gyldne rektangel*, hvor de to sider forholder sig til hinanden på ovennævnte måde, har det lige siden oldtiden indgået som formelement i utallige bygningsværker, skulpturer og malerier. Den næste figur viser først det gyldne rektangel med tilføjede talværdier, idet den største af siderne sættes lig med 1. Det gyldne rektangel har flere bemærkelsesværdige geometriske egenskaber, bl.a. kan det ved fortsat deling splittes op i et stadigt mindre og mindre gyldne rektangler: I hvert rektangel danner man et kvadrat af den mind-

ste af siderne – det resterende rektangel vil da igen være et gyldent rektangel (se fig.1.2B; jeg vil overlade det ikke særligt vanskelige bevis til læseren). Et andet sted, hvor GS dukker op, er i den regulære 5-sidede stjernepolygon, også kendt som *pentagrammet* (se fig.1.2C); her er forholdet mellem siden i den indre regulære 5-kant (b på figuren) og spidserne i stjernepolygonen (a på figuren) lig med 0,618034, altså GS (jeg overlader igen beviset til læseren).



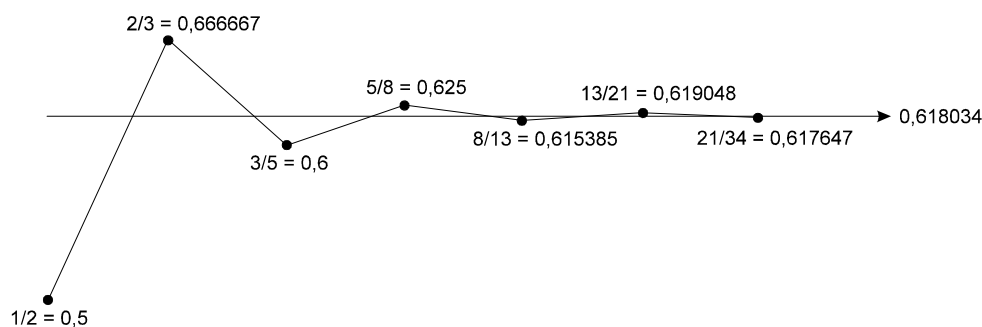
Figur 1.2

Som sagt består der en forbindelse mellem Fibonacci-rækken og GS. Udregner vi nemlig forholdet mellem Fibonacci-rækkens elementer to og to, så vil dette forhold nærme sig en grænseværdi, som er lig med GS. Efter 15 led vil der være overensstemmelse til og med 6. decimal:

1 / 1	=	1.000000
1 / 2	=	0.500000
2 / 3	=	0.666667
3 / 5	=	0.600000
5 / 8	=	0.625000
8 / 13	=	0.615385
13 / 21	=	0.619048
21 / 34	=	0.617648
34 / 55	=	0.618182
55 / 89	=	0.617978
89 / 144	=	0.618056
144 / 233	=	0.618026
233 / 377	=	0.618037
377 / 610	=	0.618033
610 / 987	=	0.618034

Tabel 1.1

De tilnærmede værdier betegnes også som *konvergenerne* til GS (af latin *con* + *vergere*, at hælde imod eller nærme sig til). En hastig gennemgang af tabellen vil afsløre, at konvergenerne skiftevis er mindre end GS og større end GS; man taler da om at konvergenerne er *oscillerende* (af latin *oscillare*, at svinge). Jeg nævner dette, fordi vi også i de efterfølgende kapitler vil blive konfronteret med dette fænomen. De oscillerende konvergener til GS er illustreret i den følgende tegning:



Figur 1.3

Mindre kendt er det, at vi også kan gå den modsatte vej, nemlig aflede Fibonacci-rækken af GS. I stedet for blot at dele det givne linjestykke en enkelt gang, skal vi fortsætte delingen, idet det større stykke fortløbende deles af det mindre; derved bliver det tilbageblivende linjestykke, *restintervallet*, naturligvis mindre og mindre. Det handler nu ikke om en sum, men om en differens.

I den næste tabel, hvor det givne linjestykke igen er sat lig med 1, kan man se, hvordan restintervallet udvikler sig gennem de første led af delingsforløbet. I første kolonne er restintervallet udtrykt som differensen mellem de to foregående restintervaller. I næste kolonne er udtrykket reduceret, og det er her Fibonacci-tallene giver sig til kende – hvad jeg yderligere har tydeliggjort ved at anbringe hhv. de heltallige led og γ -leddene under hinanden. Restintervallets talværdi er udregnet i sidste kolonne (beregningerne er gennemført med 10 decimaler, dvs. $GS = 0,6180339887$).

$1 - \gamma$	$1 - \gamma$	0,381966
$\gamma - (1 - \gamma)$	$-1 + 2\gamma$	0,236068
$(1 - \gamma) - (-1 + 2\gamma)$	$2 - 3\gamma$	0,145898
$(-1 + 2\gamma) - (2 - 3\gamma)$	$-3 + 5\gamma$	0,090170
$(2 - 3\gamma) - (-3 + 5\gamma)$	$5 - 8\gamma$	0,055729
$(-3 + 5\gamma) - (5 - 8\gamma)$	$-8 + 13\gamma$	0,034441
$(5 - 8\gamma) - (-8 + 13\gamma)$	$13 - 21\gamma$	0,021288
$(-8 + 13\gamma) - (13 - 21\gamma)$	$-21 + 34\gamma$	0,013153
$(13 - 21\gamma) - (-21 + 34\gamma)$	$34 - 55\gamma$	0,008136
$(-21 + 34\gamma) - (34 - 55\gamma)$	$-55 + 89\gamma$	0,005017

Tabel 1.2

Læg mærke til at leddene i 2. kolonne skiftevis er positive og negative; hvad der på et givet trin er det store linjestykke, bliver det mindre linjestykke på næste trin – og omvendt. Denne iagttagelse bliver bl.a. aktuel, når vi i et senere kapitel skal undersøge snittets kædebrøksfremstilling. En tilsvarende tabel kan opstilles for ethvert andet snit, men det er kun i dette specielle tilfælde, der sker et fortegnsskifte på hvert trin. Hvis man udregner forholdet mellem restintervallerne to og to, vil man opdage, at det overalt er det samme – nemlig GS (eksempelvis $0,236068 / 0,381966 = 0,618034$, $0,145898 / 0,236068 = 0,618034$). Men igen gælder det kun dette specielle tilfælde; for alle andre snit vil forholdet forandre sig fra trin til trin.

Det er også værd at notere sig, at når snittet som her er et irrationelt tal, vil delingen fortsætte i det uendelige; er snittet derimod rationelt, vil de to stykker før eller senere ende med at blive lige store, og delingen vil dermed være afsluttet. Det vender vi tilbage til i næste kapitel.

* * *

Fibonacci-rækken kan imidlertid også afledes af GS på en helt anden måde – og dermed åbner der sig et helt nyt perspektiv, som fører os rundt i nogle af matematikkens mindre kendte kringelkroge. Eksempelvis stifter vi i allerede i dette kapitel bekendtskab med Eulers ϕ -funktion og Steinhaus' teorem. Senere kommer det til at handle om kædebrøker og talspektre, Farey-brøker, Ford-cirkler og Wallis algoritme, og i sidste kapitel viser det sig, at vi i mellemtiden har fundet svaret på et spørgsmål, der har optaget musikteoretikere siden de gamle grækere: Ligger der et matematisk princip bag musikkens skalaer? For at få sat tal på et begreb, som i denne forbindelse spiller en vigtig rolle, *musikkens gyldne snit*, er det dog nødvendigt først at foretage en lille ekskursion ind i logaritmernes verden, nærmere betegnet de binære logaritmer.

Men lad os begynde med at betragte fig.1.4. Den forestiller en målestok med to forskellige inddelinger – på samme måde som f.eks. en tommestok kan være inddelt i både tommer og centimeter. Men hvor det på tommestokken handler om et enten-eller, handler det her om et både-og. Den mindre enhed skal nemlig forstås som en *underdeling* af den større (på samme måde som enheden på en tommestok kan være underdelt i halve, kvarte, ottendedele osv. af en tomme). Det specielle er, at den mindre enhed ikke ”går op” i den større, som det er tilfældet med en normal målestok; forholdet mellem de to enheder kan med andre ord ikke skrives som en brøk med tælleren 1, men den er udtrykt ved tallet 0,618034, altså det gyldne snit.



Figur 1.4

I næste kapitel handler det også om målestokke, der er inddelt efter to forskellige enheder, blot kan forholdet mellem disse nu være et *vilkårligt* tal. Det vil derfor være hensigtsmæssigt med det samme at indføre nogle generelle betegnelser for de størrelser og begreber, vi får med at gøre. De to enheder vil vi betegne som hhv. den *primære* og den *sekundære* enhed. På samme måde vil vi skelne mellem den primære og den sekundære *skala*, idet ordet 'skala' jo er den almindelige betegnelse for inddelingen på en målestok. Dermed har vi også fået etableret en bekvem overensstemmelse mellem matematisk og musikalsk terminologi, for som jeg har demonstreret det andetsteds, kan musikkens skalaer nemlig også tolkes som inddelinger på en målestok: *den tonale målestok*.

Endvidere vil vi symbolisere de to inddelinger ved bogstaverne p og q. Eksempelvis betyder $q = 8$, at vi har at gøre med den 8. deling på den sekundære skala. De to skalaer har nulpunktet fælles, men eftersom forholdet er et irrationelt tal, vil de aldrig mødes igen, ligegyldigt hvor langt vi fortsætter ud ad målestokken.

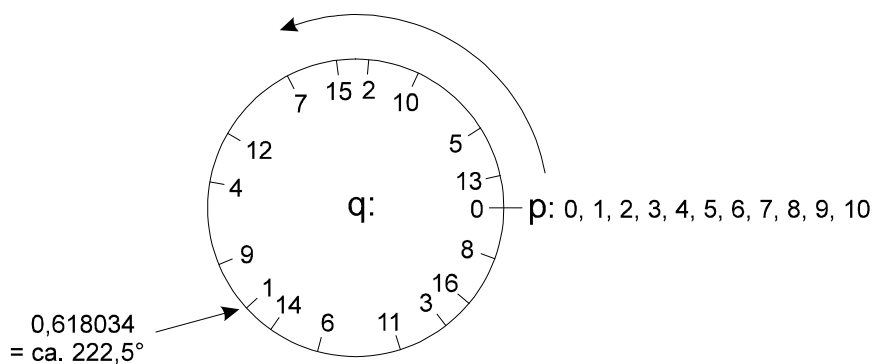
Afstanden mellem to vilkårlige inddelinger på skalaen vil vi betegne som et *interval*. Det er igen en betegnelse, som både bruges i matematikken og i musikken; i første tilfælde handler det om afstanden mellem to punkter, i andet tilfælde om afstanden mellem to toner. Vi vil specielt fokusere på intervallerne *mellem* de to skalaer. Som man kan se på figuren er eksempelvis intervallet mellem $q = 8$ og $p = 5$ ganske lille, hvorimod intervallet mellem $p = 5$ og $q = 9$ er væsentligt større.

Udtrykkene i tabel 1.2 vil herefter generelt kunne skrives som henholdsvis:

$$- p + q \cdot \gamma \quad \text{og} \quad p - q \cdot \gamma$$

En målestok behøver som bekendt ikke nødvendigvis at have form som en ret linje; den kan også have form som en cirkel. Når man f.eks. skal måle en længere vejstrækning, kører man strækningen igennem med et hjul, hvis omkreds er nøjagtig én meter, hvorefter man tæller antallet af omdrejninger. Er omkredsen yderligere inddelt i centimeter, vil også denne sekundære inddeling gentage sig for hver omdrejning. Hvis vi derimod forestiller os, at målestokken i fig.1.3 omdannes til et hjul, hvor omkredsen er lig med den primære enhed (som vi altså har tildelt værdien 1), så vil inddelingen på den sekundære skala *ikke* gentage sig for hver omdrejning, men der vil løbende ske en forskydning.

Denne forskydning illustreres i fig.1.5. Figuren er orienteret i forhold til *det polære koordinatsystem*, dvs. nulpunktets placering svarer til ”kl. 3” på et ur, og rotationsretningen er modsat uret. Det polære koordinatsystem, er så at sige skræddersyet til at anskueliggøre cykliske forløb, og det er en indlysende fordel, at vi lige fra begyndelsen orienterer alle figurer på samme måde.



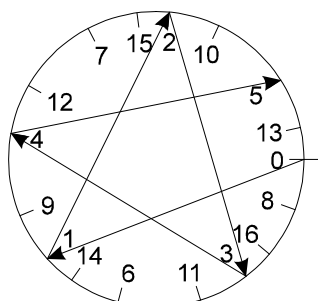
Figur 1.5

Figuren illustrerer forskydningen i løbet af 10 omdrejninger. Mens alle afmærkninger på den primære skala mødes i samme punkt på cirklen (talrækken til højre), vil den første afmærkning på den sekundære skala, $q = 1$, falde dér, hvor pilen peger. Foretrækker man at regne i gradmål er det $0,618034 \cdot 360^\circ = \text{ca. } 222,5^\circ$. Den næste afmærkning, $q = 2$, finder vi ved $2 \cdot 0,618034 = 1,236068$ eller $2 \cdot 222,5^\circ = 445^\circ$, og generelt finder den n 'te afmærkning ved $n \cdot 0,618034$ eller $n \cdot 222,5^\circ$.

Hvad enten vi regner i gradmål eller i cykliske enheder, så repræsenterer disse mål *rotationsvinklen*, dvs. den samme afstand fra begyndelsepunktet, som vi målte på den lineære målestok. Men her er vi mere interesseret i *retningsvinklen*, dvs. den korteste afstand på cirkelperiferien regnet fra nul-punktet. Denne finder vi ved at fratække antallet af omdrejningen ganget med den primære enhed. For $q = 2$ giver det hhv. $1,236068 - 1 = 0,236068$ og $445^\circ - 360^\circ = 85^\circ$. Prøv eventuelt selv at udregne retningsvinklen for nogle af de andre punkter på cirklen.

Overalt i naturen finder vi eksempler på periodiske forløb, der på denne måde forskydes i forhold til hinanden, og ikke mindst når det drejer sig om astronomiske fænomener. Lad eksempelvis den primære enhed repræsentere Jordens omløbstid om solen. Idet nulpunktet nu angiver det tidspunkt, hvor en tænkt planet med en omløbstid på $0,618034$ år er i konjunktion (dvs. hvor Jorden og den anden planet står på samme linje i forhold til solen), illustrerer figuren, hvornår de næste konjunktioner indtræffer inden for de nærmeste 10 år. Omregnet til dage er afstanden mellem konjunktionerne $0,618034 \cdot 364,25 \text{ dage} = 225,12 \text{ dage}$ ¹.

Vi kunne også fortolke forløbet som den bane, en lysstråle følger, hvis den bliver "fanget" i et cirkulært spejl, idet den første gang reflekteres fra et punkt, der ligger $222,5^\circ$ fra det sted, hvor den bliver "fanget" – eller vi kunne tolke det som den bane en billardkugle følger, når den under de samme betingelser rikoletterer (tilbagekastes) på et (tænkt) rundt billardbord og vi i øvrigt ser bort fra, at der er noget der hedder gnidningsmodstand! Begge tolkninger er illustreret i denne figur:



Figur 1.6

¹ Faktisk er Venus's omløbstid tæt på GS, og hvis man på samme måde ønsker at illustrere de reelle konjunktionstidspunkter for Venus, skal man blot udskifte GS med $0,6152$.

”Kordemetoden”, som vi passende kan kalde princippet i den sidste figur, vil jeg i de følgende kapitler ofte gøre brug af, når et delingsforløb skal illustreres. Det er i øvrigt let at indse, at forløbet ender med en regulær polygon, hvis forholdet mellem de to enheder er rationelt.

De intervaller, der på denne måde dannes ved, at den sekundære skala så at sige *foldes ind* i den primære, er identiske med de intervaller, vi finder *mellem* de to skalaer i fig.1.3. Således genfinder vi f.eks det før omtalte lille interval mellem $q = 8$ og $p = 5$ som intervallet mellem 8 og 0 i fig.1.6. Prøv eventuelt selv at identificere andre af intervallerne!

Ved vekselvirkningen mellem den primære og den sekundære skala er der nu opstået en ny type skala, eller rettere et helt system af skalaer, som hver især er karakteriseret ved et unikt og i øvrigt asymmetrisk *skalamønster* – og det er ganske den samme type af mønstre, der karakteriserer musikkens skalaer; her handler det blot om et andet ”snit” (omtales i næste afsnit).

* * *

Jeg brugte før udtrykket, at den sekundære skala *foldes ind* i den primære. Som det fremgår af fig.1.6 omgrupperes ved denne indfoldning den sekundære skalas numeriske orden til en ny orden, som jeg kalder *den indfoldede orden* – og i analogi hermed er den oprindelige numeriske orden altså *den udfoldede orden*. I eksemplet fig.1.6 er den indfoldede orden:

0, 13, 5, 10, 2, 15, 7, 12, 4, 9, 1, 14, 6, 11, 3, 16, 8

Betegnelsen *den indfoldede orden* har jeg lånt fra fysikeren David Bohm. Han bruger ganske vist betegnelsen i forbindelse med en beskrivelse af visse atomare fænomener, men han siger også, at ”når man lytter til musik, sidder man derfor og opfatter en indfoldet orden direkte med sanserne”. I min beskrivelse af tonesystemet og musikkens skalaer, at den orden, Bohm her taler om, principielt er af samme art som den, der her er beskrevet i forbindelse med Det gyldne Snit, blot handler det nu om forholdet mellem musikkens to grundlæggende intervaller, oktaven og kvinten. Det er defineret som den binære logaritme til kvintens frekvenskvotient: $\log_2(3/2) = 0,5849625$. For denne grundlæggende konstant i definitionen af tonesystemet har jeg indført betegnelsen *Musikkens gyldne Snit*.

I analogi med, at jeg betegner den metode, hvorved skalaen i fig.1.6 dannes, som en *indfoldning*, vil jeg herefter betegne selve skalaen som *den indfoldede skala* – hvor *den udfoldede skala* så er den, der er illustreret i fig.1.4.

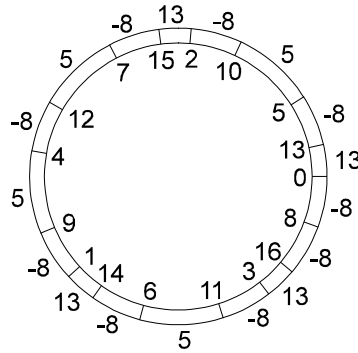
På ethvert trin af forløbet er den indfoldede skala beskrevet ved

1. intervallernes antal,
2. intervallernes størrelse
- og 3. intervallernes rækkefølge.

Intervallernes antal er naturligvis givet med antallet af delinger. Hvad angår intervallernes størrelse, er det indlysende, at denne aftager i takt med at deres antal vokser, men spørgsmålet er, hvor mange *forskellige* intervaller, der forekommer på et givet trin af forløbet? Hvad angår intervallernes rækkefølge, må vi foreløbig nøjes med at konstatere, at den ”giver sig af sig selv”, efterhånden som nye intervaller kommer til; men i et senere kapitel skal vi se en mere matematisk løsning på problemet.

Her vil jeg nu foreløbig besvare spørgsmålet om, hvor mange *forskellige* intervaller, der forekommer på et givet trin af forløbet. Umiddelbart vil man måske mene, at der kan forekomme adskillige, og at deres antal vokser med antallet af delinger. Men det er forkert! På ethvert trin af forløbet kan der nemlig kun blive tale om, at intervallerne er fordelt mellem 1, 2 eller 3 forskellige størrelser.

Lad mig foreløbig illustrere dette med en tegning, der ligesom de to foregående omfatter de 10 første primære inddelinger, og de 16 første sekundære inddelinger:



Figur 1.7

Den indfoldede skala er nu fremstillet som en inddelt ring. Det er den indfoldede orden, som er tilføjet *inde* i ringen, mens tallene uden om ringen er det, jeg kalder *intervalldifferenserne* (denne betegnelse er igen valgt med sigte på den musikalske interpretation, idet det handler om det tonale modstykke til intervallets akustiske definition, frekvenskvotienten). De fortegnbestemte intervalldifferenser fremkommer ved, at man løbende udregner differensen mellem to på hinanden følgende tal i den indfoldede orden, altså $13 - 0 = 13$, $5 - 13 = -8$, $10 - 5 = 5$ osv..

Når vi nu sammenligner tallene hele vejen rundt om skalaen, viser det sig, at der ikke forekommer andre end de tre nævnte – og idet intervalldifferensen er et éntydigt udtryk for intervallets størrelse, er cirklen følgelig heller ikke delt i mere end tre forskellige intervaller!²

Her har vi også den første indikation på, at Fibonacci-rækken er indblandet, for læg mærke til at vi har at gøre med tre på hinanden følgende tal i denne række: 5, 8 og 13. Det kunne selvfølgelig være et tilfælde, men hvis vi trin for trin analyserer et længere forløb, vil vi se, at de intervaller, der forekommer på et givet trin, *altid* er defineret ved intervalldifferenser, som svarer til Fibonacci-tallene. Før vi foretager en sådan analyse, vil jeg dog lige vise, hvordan vi på en nem måde kan beregne et intervals størrelse, når vi kender intervalldifferensen.

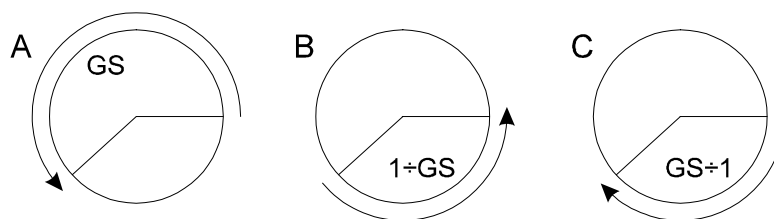
Vi skal blot multiplicere den pågældende intervalldifferens med $GS = 0,618034$, hvorefter vi ombytter tallet foran decimalkommaet med et nul; dog skal vi, når intervalldifferensen er negativ, i stedet multiplicere med $1 - GS = 0,381966$, og intervalldifferensens fortegn skal da ændres til + (pilen symboliserer bortkastelsen af den heltallige del):

$$\begin{aligned} 5 \cdot 0,618034 &= 3,090170 \rightarrow 0,090170 \\ 8 \cdot 0,381966 &= 3,055728 \rightarrow 0,055728 \\ 13 \cdot 0,618034 &= 8,034442 \rightarrow 0,034442 \end{aligned}$$

Måske kan en supplerende kommentar være nødvendig: Når tallet foran decimalkommaet skal ombyttes med et nul, er det fordi multiplikationen i sig selv vedrører afstanden fra begyndelsepunktet på den lineære målestok (den udfoldede målestok). Denne afstand svarer til det, jeg før kaldte rotationsvinklen, men det vi søger er retningsvinklen – og den finder vi, når det handler om cykliske mål, netop ved at ombytte tallet foran decimalkommaet med et nul.

Hvad angår tilfældet, hvor intervalldifferensen er negativ, så handler det igen om en ombytning; vi ombytter nemlig GS , forstået som en vinkel, med dens eksplementvinkel (differensen eller restintervallet mellem hele cirklen og vinklen), således som det er vist i fig.1.8 A og B.

² Først for ganske nylig (maj 2011) blev jeg opmærksom på, at denne regel, der gælder for ethvert snit, allerede er kendt under navnet *Steinhaus Theorem* eller *The Three Gap Theorem* (min egen opdagelse går tilbage til midten af 1980'erne)



Figur 1.8

Når intervaldifferensen er negativ betyder det, at vinklen regnes i modsat retning, nemlig som det er illustreret i fig.1.8 C. I det hele taget skal man være opmærksom på, at alle de mål, vi her regner med, længdemål såvel som vinkelmål, er fortegnbestemte. Lad os tage et andet eksempel: Når i fig.1.7 det lille intervallet mellem 0 og 8 har intervaldifferensen $\div 8$, er det fordi det som vinkelmål regnes fra nulpunktet og *højre* om; det store interval mellem 0 og 8 regnet fra nulpunktet og *venstre* om, har derimod intervaldifferensen $+8$. Den bedste måde at blive fortrolig med dette på, er ved selv at regne nogle eksempler igennem.

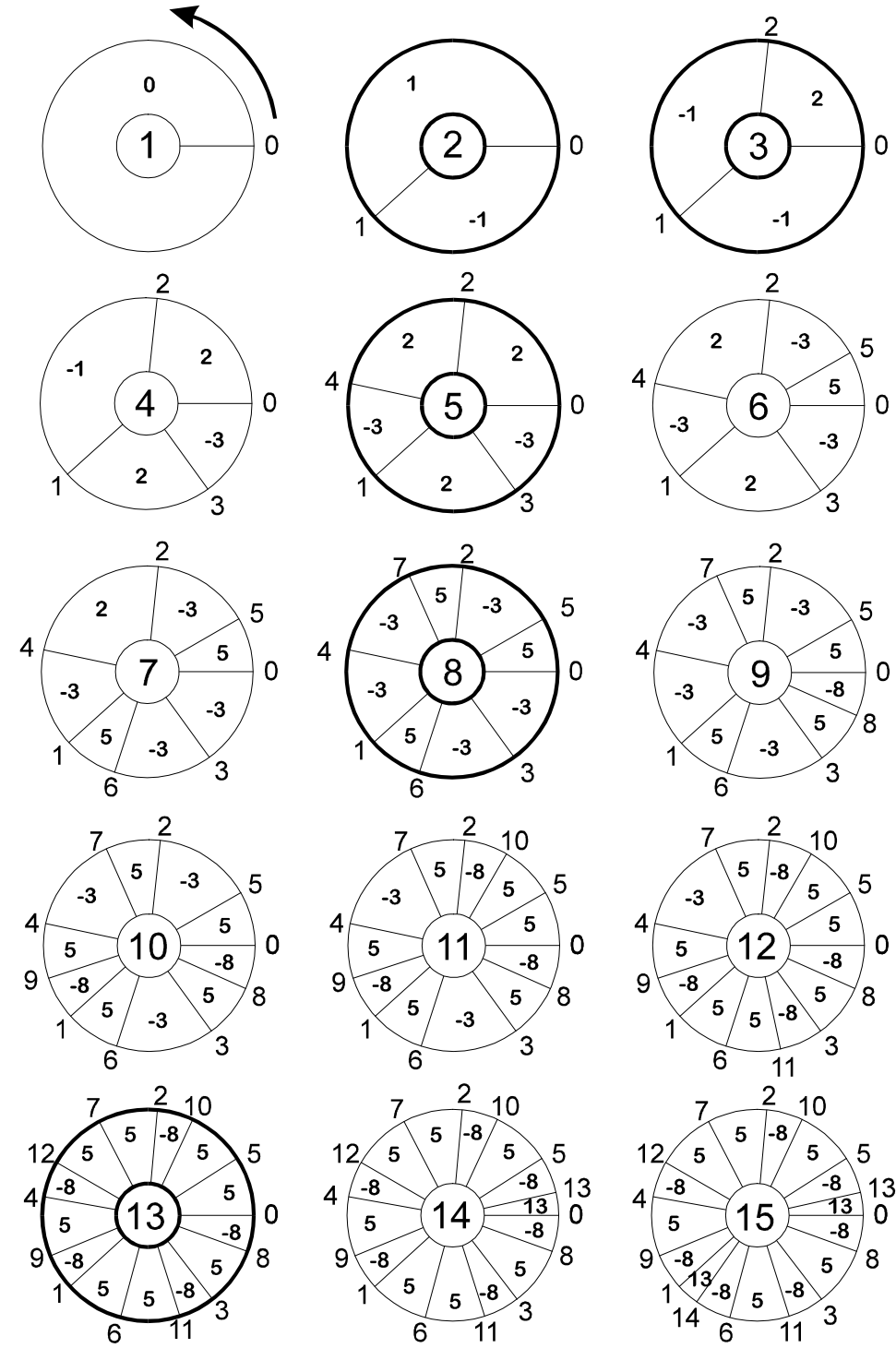
Og for endnu en gang at knytte tråden tilbage til mit oprindelige udgangspunkt, skal det lige tilføjes, at sådanne modsvarende intervaller, hvor summen af intervaldifferenserne er 0, i musikken er kendt som *omvendinger*. Eksempelvis er den store terts defineret ved intervaldifferensen $+4$, mens den lille sekst er defineret ved intervaldifferensen -4 . De to intervaller er som bekendt hinandens omvendinger, og som man ser, er summen af intervaldifferenserne 0.

* * *

Lad os nu følge indfoldningsforløbet trin for trin, idet den indfoldede skala i de næste figurer (se næste side) populært sagt bliver fremstillet som en "lagkage", der deles i stadig mindre og mindre stykker. Numrene på inddelingen er af praktiske grunde her anbragt *uden for* cirklen, og den for hvert intervalstørrelse karakteristiske differens er anbragt inde i "lagkagestykkerne". I det følgende vil intervaldifferensen kort blive symboliseret ved bogstavet Δ (stort delta). Det større tal i midten af hver figur er en nummerering af forløbet (omtales i det følgende som trin 1, trin 2, osv.), men det angiver tillige, hvor mange intervaller, der er på det pågældende trin.

For det første får vi her bekræftet den tidligere fremsatte påstand, at intervaldifferenserne systematisk følger Fibonacci-rækken – i dette udsnit af forløbet dog kun til og med 15. Læg også mærke til, at intervallerne optræder i samme rækkefølge som i tabel 1.2.

Dernæst bemærker vi, at antallet af skalatrin (dss. intervalstørrelse) på intet tidspunkt overstiger 3, og det reduceres til 2 netop på de steder i forløbet, hvor antallet af intervaller er lig med et Fibonacci-tal. Disse steder er på tegningen fremhævet ved at omkredsen af cirklen er gjort kraftigere. Man kan således sige, at der ud af delingsforløbet "udkrystalliserer" sig en kæde af minimerede skalamønstre, idet antallet af elementer (intervaller) i de enkelte led i kæden følger Fibonacci-rækken. En passende betegnelse for disse minimerede skalaer vil være *Fibonacci-skalaerne!*



Figur 1.9

Videre bemærker vi, at der i hver Fibonacci-skala består følgende sammenhæng mellem antallet af store og små skalatrin, m og n , og de tilhørende intervaldifferenser, Δ_m og Δ_n :

$$m \cdot \Delta_n + n \cdot \Delta_m = 0$$

Eksempelvis finder vi for den Fibonacci-skala, der fremkommer på trin 13:

$$8 \cdot 5 + 5 \cdot -8 = 0$$

Som interval betragtet er den primære enhed, cirklen, altså defineret ved intervaldifferensen 0.

Figuren lader også ane en sammenhæng mellem Fibonacci-skalaerne indbyrdes, der kan udtrykkes således: *antallet af intervaller i en skala er lig med antallet af intervaller i den foregående skala plus antallet af store intervaller i samme* (da det jo er disse sidste, der deles, skal de tælles med en ekstra gang). Denne sammenhæng vender jeg tilbage til lidt længere fremme.

Den musikkyndige begynder sikkert også at ane en sammenhæng mellem Fibonacci-skalaerne og musikkens skalaer – ikke sådan at de på nogen måde er identiske, men de er strukturelt *analoge* i og med at det er det samme matematiske princip, der ligger til grund for deres dannelse. Musikkens skalaer er som bekendt også sammensat af to og kun to intervalstørrelser eller skalatrin (eksempelvis den store og den lille sekund i den diatoniske skala), og tilsammen danner de – hvad der dog *ikke* er almindeligt bekendt! – en kæde af skalaer, hvor antallet af elementer (intervaller) i de enkelte led i kæden følger en række, som er analog med (men numerisk forskellig fra) Fibonacci-rækken. Hvordan skalaerne og de tilhørende rækker udvikler sig, er ene og alene dikteret af snittet. Her har vi foreløbig fokuseret på $GS = 0,618034$, men som allerede nævnt handler det i musikken om snittet $0,5849625$, *Musikkens gyldne Snit*.

Det er også let at indse, at et tilsvarende system af skalaer og rækker må eksistere for *ethvert* snit. Med henblik på at vi i de næste kapitler skal analysere det *generelle* tilfælde og i sidste kappitel det *musikalske* tilfælde, vil det være hensigtsmæssig allerede nu at indføre en fælles betegnelse for de tre forskellige typer af skalaer, der kan forekomme:

1. *tri-intervalliske skalaer*, hvor skalaen er sammensat af 3 forskellige intervalstørrelser
2. *bi-intervalliske skalaer*, hvor skalaen er sammensat af 2 forskellige intervalstørrelser
3. *mono-intervalliske skalaer*, hvor alle intervaller er lige store.

I fig.1.9 er skalaerne på trin 2, 3, 5, 8 og 13 bi-intervalliske, mens de øvrige er tri-intervalliske. Mono-intervalliske forekommer kun, når snittet er rationelt (se næste kapitel), og da kun på det afsluttende trin. De bi-intervalliske skalaer er de interessanteste og ikke kun fordi musikkens skalaer hører til i denne kategori, men også set fra en matematisk synsvinkel.

De bi-intervalliske skalaer dannes i et rekursivt forløb, dvs. hvert enkelt skalamønster har alle de foregående skalamønstre som forudsætning, og det er derfor ikke muligt at opstille en generel formel, hvorefter den n 'te bi-intervalliske skala umiddelbart kan beregnes³. Men den ovenfor verbalt formulerede sammenhæng mellem Fibonacci-skalaerne indbyrdes kan beskrives matematisk på følgende måde, idet det *samlede* antal af intervaller på to efter hinanden følgende trin kaldes hhv. S_{n-1} og S_n , og antallet af *større* intervaller på de samme to trin kaldes hhv. a_n og a_{n-1} :

$$S_n = S_{n-1} + a_{n-1}$$

Denne formel gælder for *alle* skaladannelser og *alle* snit. I det specielle tilfælde, hvor det drejer sig om Fibonacci-skalaerne og det gyldne snit, er antallet af større intervaller på ethvert trin imidlertid lig med den samlede sum af intervaller på det foregående trin, altså:

$$a_n = S_{n-1} \quad \text{eller} \quad a_{n-1} = S_{n-2}$$

³ En undtagelse er dog netop GS; her vil i hvert fald antallet af intervaller i det n 'te led, altså det n 'te Fibonacci-tal, kunne beregnes efter den såkaldte Binets formel:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Formlen blev egentlig opdaget af De Moivre i 1718, men den er opkaldt efter Binet, som genopdagede den i 1843. Som vi senere skal se (kap.5), er der en simpel sammenhæng mellem konvergenerne og rækken, når snittet er afledt af en rod, og det er derfor nærliggende at tro, at Binets formel må kunne udvides til at gælde disse tilfælde generelt. Hvis en sådan generel formel ikke allerede *er* kendt, har læseren måske her en chance for at indskrive sit navn i matematikkens historie!

Ved nu at erstatte a_{n-1} i den første formel med S_{n-2} får vi den ”klassiske” definition på Fibonacci-rækken:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$$

Eller i en verbal formulering: hvert led i rækken fremkommer som summen af de to foregående led. Denne ”klassiske” formel siger imidlertid ikke noget om, at der bag Fibonacci-rækken skjuler sig det system af strukturdannelser, *Fibonacci-skalaerne* – endsige at Fibonacci-rækken og Fibonacci-skalaerne blot er et specielt tilfælde blandt uendeligt mange, idet der jo til ethvert tal mellem 0 og 1, rationelt eller irrationelt, svarer et snit, og dermed også en unik række plus et tilhørende unikt system af skalaer.

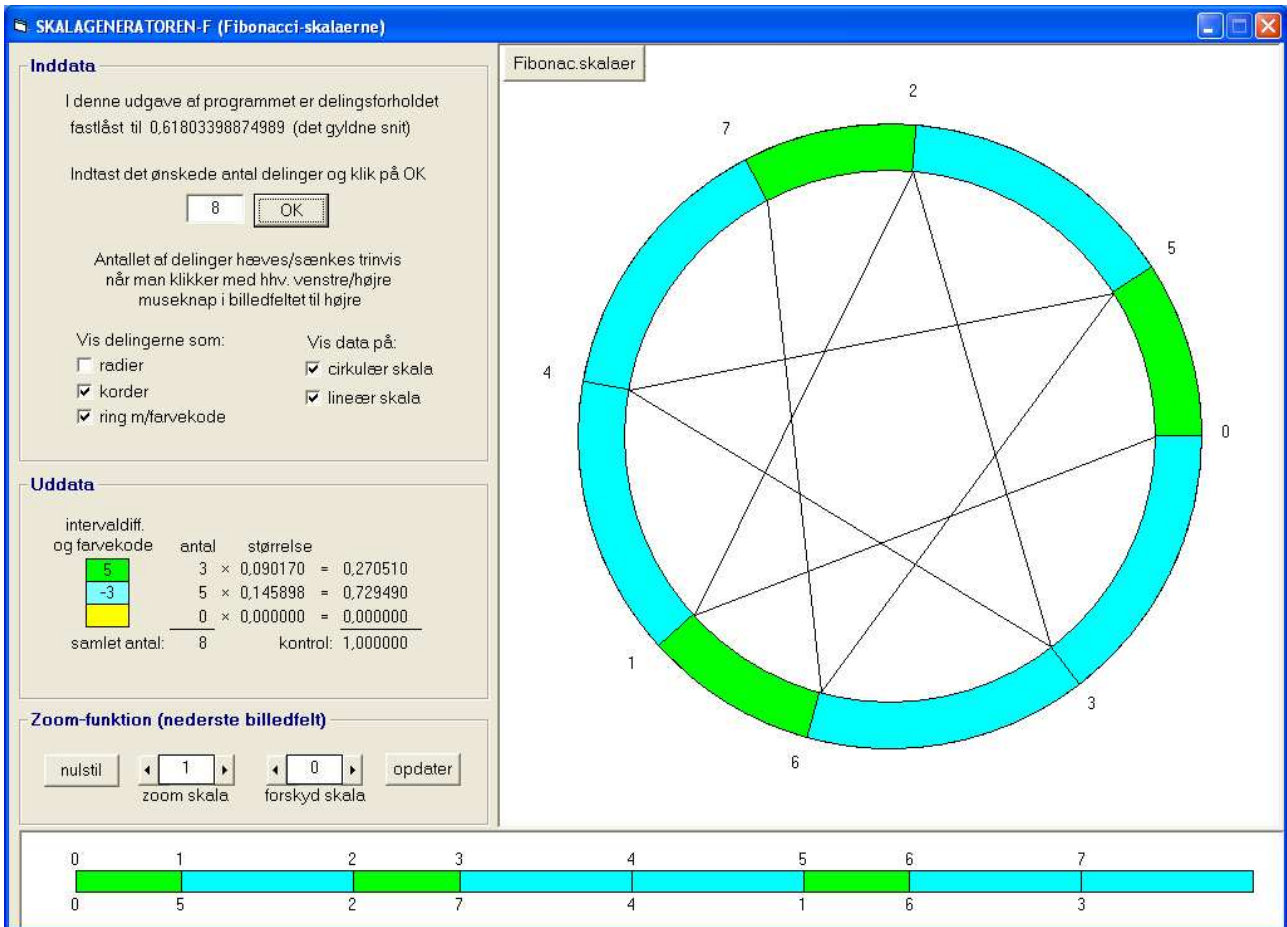
Introduktion til programmet SKALAGENERATOREN-FIB

På grundlag af den foregående analyse af delingsforløbet er det en forholdsvis simpel opgave at skrive et computerprogram, hvor man inden for rimelige grænser praktisk talt momentant kan få beregnet og udskrevet data for en vilkårlig skala eller for en længere sekvens af skalaer og tillige kan få skalaen fremstillet grafisk. Et sådant program er SKALAGENERATOREN. Jeg har skrevet programmet i tre versioner, der alle kan downloades fra webstedet www.josebamus.dk/matematik:

1. En forenklet version, SKALAGENERATOREN-FIB, hvor snittet er fastlåst til GS, og hvor det følgelig kun er Fibonacci-rækken og Fibonacci-skalaerne der kan genereres.
2. Den generelle version, SKALAGENERATOREN-MAT, hvor man kan indtaste et hvilket som helst snit, og hvor man ved hjælp af en række specielle funktioner kan gå i detaljer med nogle af de matematiske emner, vi kommer ind på i de følgende kapitler. Denne version gennemgås som indledning til 2. kapitel.
3. Endelig har jeg skrevet en forenklet version, SKALAGENERATOREN-MUS, hvor fokus er på dannelsen af musikkens skalaer, og hvor de rent matematiske funktioner er indskrænket til det absolut nødvendige. Til gengæld er der her tilføjet en lydfunktion, der fungerer på den måde, at de tal programmer genererer tolkes som frekvenstal, der så realiseres som lyd (sinustoner) ved hjælp af en virtuel tonegenerator, der er indbygget i programmet. Dette af hensyn til den musikinteresserede, der gerne vil forstå det skaladannende princip, og også gerne vil have et *hørligt* bevis på påstanden om, at musikkens skalaer er defineret ved et matematisk princip, men som i øvrigt ikke er interesseret i at gå i detaljer med matematikken.

Den næste figur er et eksempel på hvordan skærmbilledet i SKALAGENERATOREN-FIB ser ud, når man har genereret en skala ved at klikke på knappen KØR. I denne forenkledede version af programmet er der også blevet plads til lidt forklarende tekst. Har man læst og forstået nærværende kapitel, vil man stort set være i stand til at bruge programmet med det samme. Jeg vil anbefale, at man arbejder lidt med det, før man fortsætter med læsningen af de næste kapitler; dermed vil man også hurtigere få lært at bruge den fuldt udbyggede version, der gennemgås som indledning til næste kapitel.

Her blot nogle få kommentarer til fig.1.10. Delingerne kan vises på tre forskellige måder: som ’radier’ (svarende til den ”lagkagemodel”, vi så i fig.1.9), som ’korder’ (som i fig.1.6) og som ’ring m/farvekode’. Den sidste model kender vi fra fig.1.7, men nu er der tilføjet en farvekode, som bl.a. gør det muligt umiddelbart at identificere et interval. 1. interval er altid grønt og har positiv intervaldifferens, sidste interval er altid blått og har negativ intervaldifferens, et eventuelt restinterval er gult, og her kan intervaldifferensen være både positiv og negativ. De tre modeller kan kombineres; i eksemplet fig.1.10 er det kordemodellen og ringmodellen, der er kombineret.



Figur 1.10

Tallene nærmest ringen er den indfoldede orden; tallene længere ude er blot en nummerering af intervallerne regnet fra nulpunktet og modsat uret. Hvis der er så mange delinger, at tallene begynder at overlappe hinanden, kan man fravælge visningen af data.

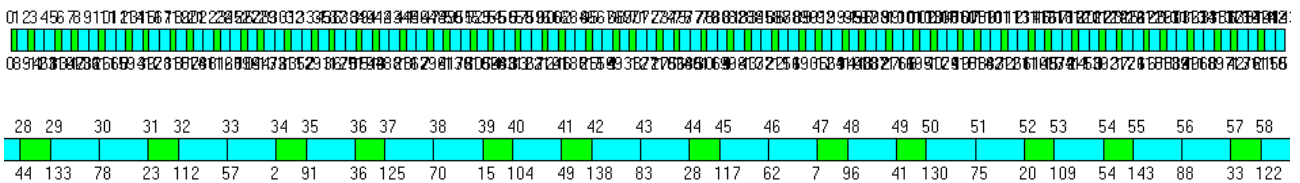
Nederst på skærbilledet vises skalaen desuden som en almindelig målestok. Man må her forestille sig, at ringen er klippet over ved nulpunktet og derefter rettet ud til en lige linje (sammenlign tallrækkerne på de to modeller). Den sidste delelinje til højre er altså identisk med den første delelinje til venstre.

Begynd med at sætte antallet af delinger til 1, vælg at få vist delingerne efter både korde- og farvekodemethoden, og klik så på OK. Flyt så musen over i billedfeltet med den cirkulære model, og klik med højre museknap (se også vejledningen i rammen "Inddata"). Nu ser man 2 delinger. Fortsæt så med at klikke med højre museknap, og læg mærke til, hvordan tallene i "Uddata" ændrer sig. Her kan man aflæse antallet og størrelsen af de tre mulige intervaller, og man kan også se intervaldifferensen samt den dertil knyttede farvekode

Notér eventuelt på hvilke trin de bi-intervalliske skalaer optræder – tilsammen vil disse tal udgøre et større eller mindre udsnit af Fibonacci-rækken.

I takt med at antallet af delinger vokser, bliver det også vanskeligere at skelne detaljerne på den lineære model, men så kan man bruge zoom-funktionen. Det næste eksempel viser øverst Fibonacci-skalaen med 144 intervaller, og nederst er samme skala forstørret 5 gange, dvs. zoom-faktoren er sat til 5. Forskydningen er sat til 2, hvorved vi kommer frem til det udsnit, der begynder ved 28 og

slutter ved 58. En rød markering langs omkredsen af den cirkulære model markerer det udsnit af skalaen, der ses ved den valgte forskydning.



Figur 1.11

Læg mærke til, at forholdet mellem det blå og det grønne skalatrin vil være det samme, ligegyldigt hvilken af de mange Fibonacci-skalaer vi undersøger - nemlig det gyldne snit. Men igen skal det understreges, at dette kun gælder, når også selve udgangspunktet er det gyldne snit; for alle andre snit vil forholdet mellem de to skalatrin ændre sig fra skala til skala.

Endnu en ting skal omtales. I øverste venstre hjørne af det store billedfelt ses en knap med påskriften "Fibonac.skalaer". Når man klikker på knappen, kommer de første 34 led af Fibonacci-rækken (frem til 10000000) til syne midt i billedfeltet, sådan som det kan ses i højre kolonne i fig.1.12 (tallene i venstre kolonne er blot en løbende nummerering). Indsætter man et tal fra denne række som "antal delinger", vil man altså få genereret en af de bi-intervalliske skalaer – i dette tilfældet betegnet som Fibonacci-skalaerne.

1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597
17	2584
18	4181
19	6765
20	10946
21	17711

Figur 1.12