Jørgen Erichsen

På opdagelse i Mandelbrot-fraktalen

En introduktion til programmet ”Mandelbrot”

Hvad er en fraktal? Noget forenklet kan man sige, at en fraktal er en geometrisk figur, der udmærker sig ved at afsløre flere og flere detaljer, efterhånden som man zoomer ind på den. Til sammenligning kan man tænke på en kystlinje, der på et kort gengives i større og større målestok – eller man kan sammenligne det med, at man i Google Earth zoomer ind på mindre og mindre detaljer.

Til grund for en fraktal ligger en ligning. Figuren afbilder grafisk ligningens løsninger i et koordinatsystem – på samme måde som eksempelvis en parabel beskriver løsningerne på ligningen $y = ax^2$. Når vi taler om fraktaler, handler det imidlertid om såkaldte rekursive ligninger, dvs. ligninger der kan gennemregnes mange gange, idet løsningen hver gang indgår som led i den næste gennemregning af ligningen.

Særlig berømt er Mandelbrot-fraktalen, der er opdaget og opkaldt efter den polskfødte matematiker Benoit Mandelbrot, og det skyldes ikke mindst, at dens detaljer udmærker sig ved en nærmest overvældende mangfoldighed og skønhed. I sin enkleste form ser ligningen for Mandelbrot-fraktalen sådan ud:

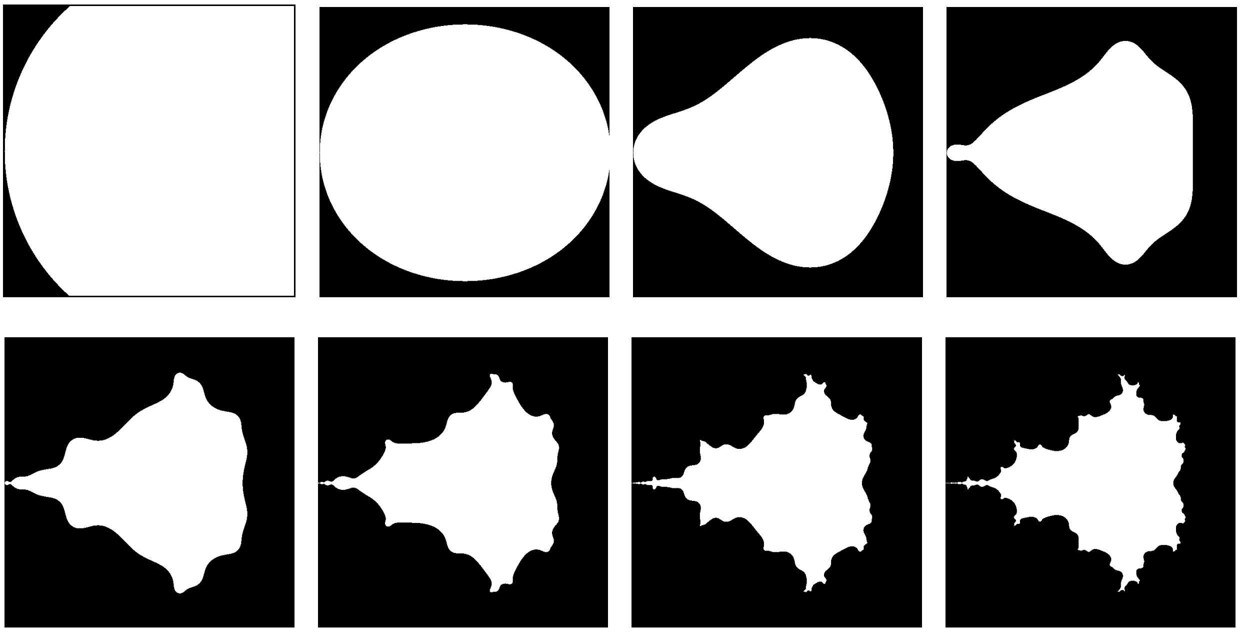
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Her er c en konstant, mens z er den variable, der stadig ændrer værdi, idet det, der her kaldes z_n, i næste gennemregning ombyttes med z_{n+1}. Lad os prøve at regne et simpelt eksempel igennem, idet vi giver z begyndelsesværdien 0 og sætte c lig med 1. De første fem gennemregninger eller *iterationer*, som det hedder med et fint ord (af latin *itera,* gentage), ser da sådan ud:

$$\begin{aligned} 0^2 + 1 &= 1 \\ 1^2 + 1 &= 2 \\ 2^2 + 1 &= 5 \\ 5^2 + 1 &= 26 \\ 26^2 + 1 &= 677 \end{aligned}$$

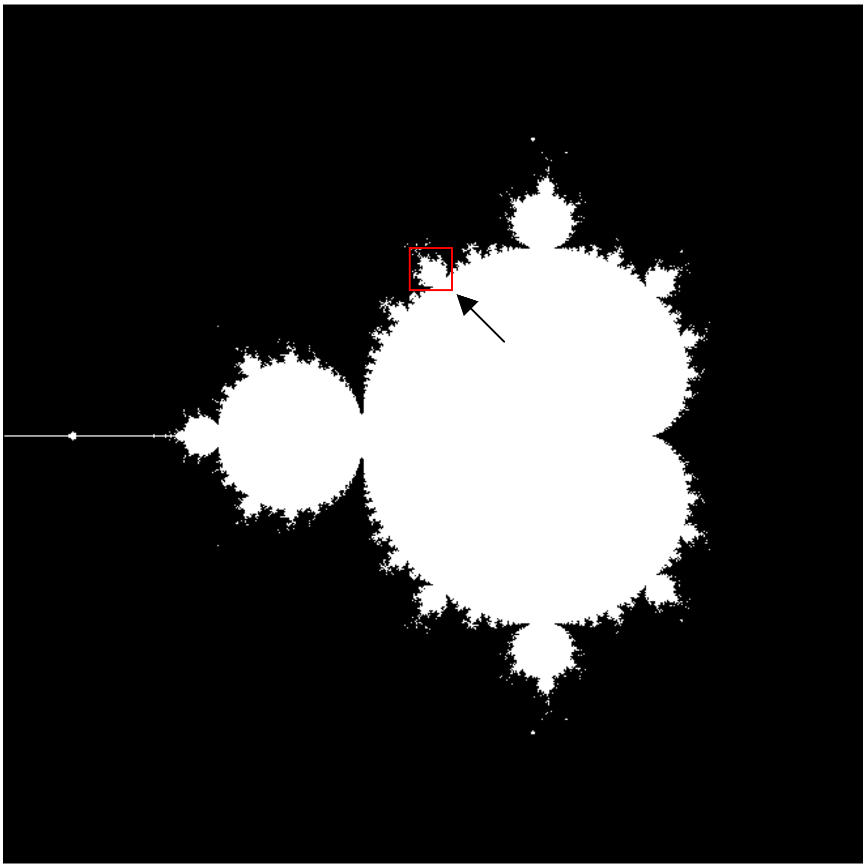
Her vokser rækken hurtigt mod uendeligt. Det særlige ved Mandelbrot-fraktalen er imidlertid, at c er et komplekst tal, dvs. et tal, der består af en reel og en imaginær del, og dermed sker der noget helt andet. Jeg vil ikke her gå nærmere ind på de komplekse og de imaginære tals matematik, og jeg vil heller ikke gå mere i detaljer med selve Mandelbrot-ligningen. Det kan man læse om mange andre steder på internettet, men man skal dog være forberedt på, at det ikke er for nybegyndere i matematikken. Her skal blot nævnes, at fordi c er et komplekst tal, vil z aldrig overskride en bestemt værdi, og man gør nu det, at man afbilder løsningerne i et almindeligt 2-dimensionalt koordinatsystem, idet den reelle del svarer til x-dimensionen, mens den imaginære del svarer til y-dimensionen.

Dermed fremkommer en lukket kurve, hvor punkterne inden for kurven er løsninger, mens punkterne uden for kurven ikke er det. Ved første gennemregning eller iteration er kurven en ganske almindelig cirkel, ved anden iteration fremkommer en ellipse, ved tredje iteration får kurven form som en pære, og i de følgende iterationer bliver ”pæren” mere og mere rynket, men også mere og mere detaljeret. De følgende billeder viser de første 8 iterationer. Alle billeder er holdt i samme målestok, og derfor er det kun et udsnit af den indledende cirkel, der er med på billedet. Desuden er alt uden for kurven farvet sort, mens alt inden for kurven er hvidt. Alle billeder er kopier fra mit eget Mandelbrot-program:



Figur 1

Det næste billede viser i større format, hvordan Mandelbrot-fraktalen ser ud efter 40 iterationer:



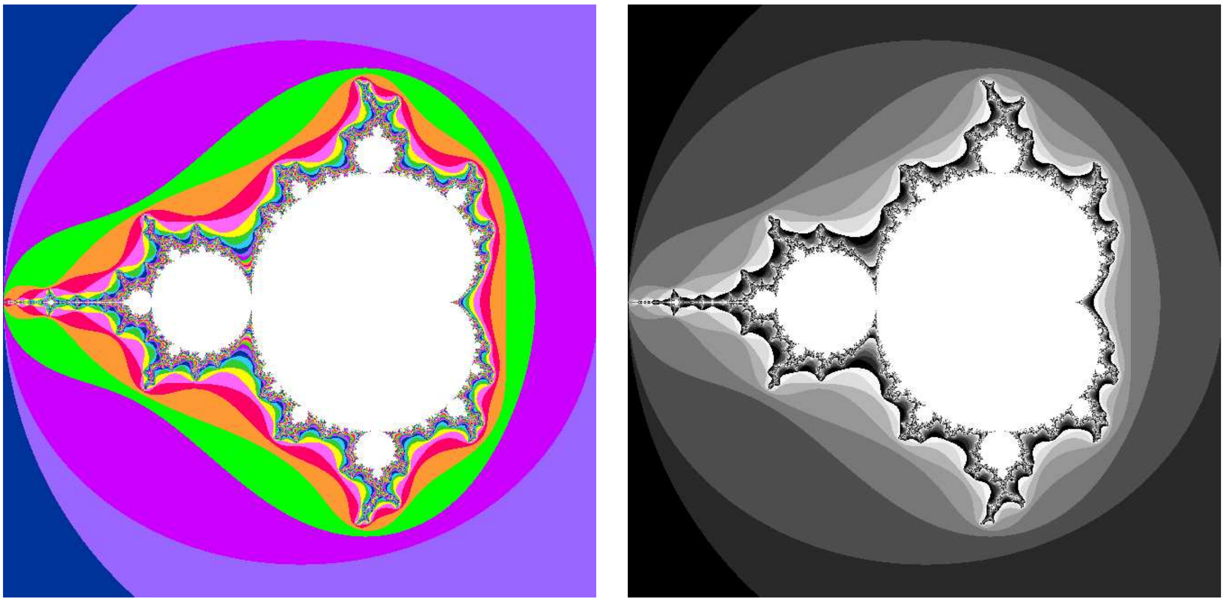
Figur 2

Nu zoomer vi ind på den detalje, der er markeret med en rød firkant og en pil, dvs. vi forstørrer dette udsnit, så det fylder hele billedfeltet ud. Dermed kommer en mængde detaljer frem, som ikke var synlige i det oprindelige billede (se figur 3 på næste side)..

Figur 3

Sådan kan man blive ved med at zoome ind så mange gange det skal være. I praksis kommer man dog til en grænse, hvor programmet ikke længere kan følge med, fordi beregningerne efterhånden foregår langt ude i decimalerne, og programmet kan "kun" håndtere 16 decimaler. En anden karakteristisk ting ved Mandelbrot-fraktalen er, at den oprindelige figur gentager sig i det små. Den "knop" i figur 2, der er forstørret i figur 3, er tydeligvis en varieret miniudgave af hele fraktalen, og som man kan se på det nye billede, skyder "knoppen" selv endnu mindre "knopper". Det kaldes *selvsimilaritet*.

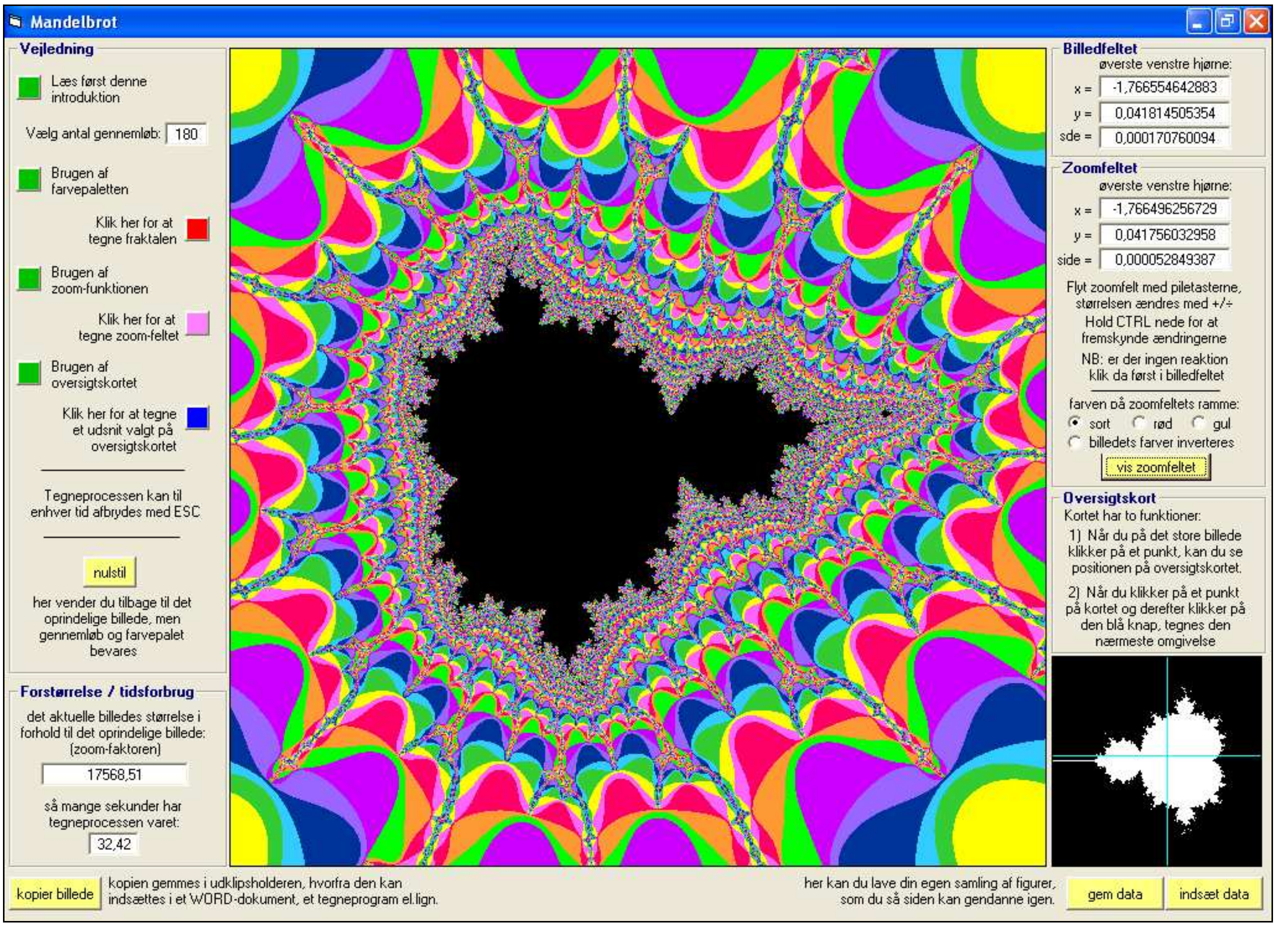
Her har vi foreløbig kun brugt farverne sort og hvid. Men i programmet kan man også vælge en farvepalet eller gråtonepalet, så hver iteration tegnes med en ny farve eller gråtone. Det ser vi et par eksempler på her – sammenlign de forskellige nuancer med serien i figur 1:



Figur 4

Sådan bruger du programmet:

I figur 5 Ser du programmets brugerflade. Tegneprocessen styres og aktiveres fra kolonnen til venstre, figuren tegnes i det store felt i midten, og i kolonnen til højre kan du aflæse billedets koordinater samt koordinaterne for zoom-feltet, altså det udsnit af billedet du vælger at zoome ind på.



Figur 5

Det er egentlig ikke nødvendigt at sige ret meget om programmet, for til venstre og højre for billedfeltet kan du læse, hvordan programmet fungerer, og yderligere vejledning finder du, når du klikker på de grønne knapper til venstre. Derfor følger her blot nogle supplerende bemærkninger.

Læg mærke til, at tegneprocessen kan aktiveres på tre forskellige måder:

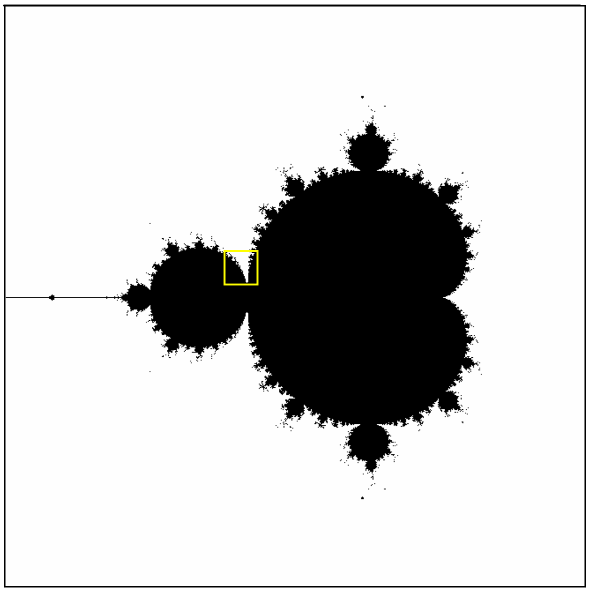
1. **Den røde knap** bruges, når man vil gentegne en figur, der allerede står i billedfeltet, event. med en anden farvepalet eller iteration – *og bemærk aten iteration i programmet kaldes et gennemløb*!. Knappen bruges også, når man lige har åbnet programmet og skal tegne selve grundfiguren.
2. **Den pink knap** bruges, når man vil zoome ind på en detalje, dvs. når man vil tegne det udsnit af figuren, der ligger inden for zoom-feltet
3. **Den blå knap** bruges, når man vil se en detalje, man har valgt ved at klikke på et punkt på oversigtskortet nederst til højre.

Hvis du vælger den sidste mulighed, er zoom-faktoren (forstørrelsen) fastlåst til 15 X; men du kan så zoome videre ved at flytte zoom-feltet hen over den del af figuren, du vil forstørre yderligere (se anvisningen i højre kolonne), hvorefter du klikker på den pinkfarvede knap.

Du skal være opmærksom på, at skærmens opløsning sætter en grænse for, hvor mange gennemløb (altså iterationer) du kan bruge for en given forstørrelse; det betyder i praksis, at du ikke får flere detaljer med, selvom du vælger flere gennemløb. Men i takt med at du zoomer ind på mindre og mindre detaljer, kan du hæve antallet af gennemløb, ja så er det faktisk nødvendigt for at se detaljerne.

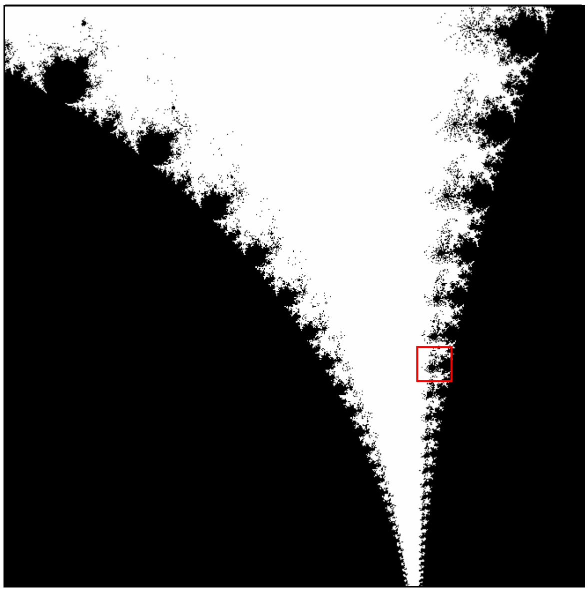
Her følger nu en anvisning på en rejse ind i den del af Mandelbrot-fraktalen, der er kendt som *søhestedalen* – fordi der på et tidspunkt fremkommer nogle detaljer, der minder om søhestens snoede hale. Hvis du allerede har åbnet programmet og har flyttet zoom-feltet eller ændret på dets størrelse, er det nemmest at genstarte programmet, så du har de rigtige indstillinger ved rejsens begyndelse.

1. Begynd med at klikke på den grønne knap, hvor der står "Brugen af farvepaletten". Her vælger du knappen "alle gennemløb hvide, baggrund sort". Det er den samme indstilling, der er valgt til fig.1-3. Du behøver ikke at lukke farvepaletten igen, for den lukkes automatisk, når du tegneprocessen begynder.
2. Nu sætter du antallet af gennemløb til 40, hvorefter du klikker på den røde knap. Derved får du tegnet selve grundfiguren. Resultat kan du se på det første af de efterfølgende billeder. Koordinaterne samt billedets sidelængde (de data, der fremkommer i tekstboksene for oven i højre kolonne) står angivet neden under.
3. Nu sætter du antallet af gennemløb til 140 for at få flere detaljer med, og derefter klikker du på den pinkfarvede knap, hvorved du får tegnet det udsnit, der ligger inden for zoom-feltet. Zoomfeltet er i det første billede vist som et gult kvadrat. Du skulle nu gerne se figuren i næste billede, fig.6b. Bemærk at alle de små "knopper" er kopier af den oprindelige figur – det er det, der kaldes *selvsimilaritet*.



x = -2; y =1,5; side = 3; zoom = 1, 40 gennemløb

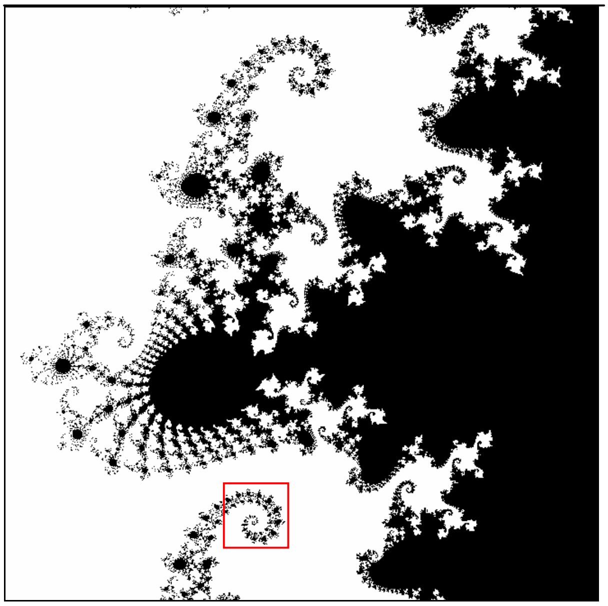
Figur 6a



x = -0,892424242424; y = 0,248484848485 side = 0,2; zoom = 15; 140 gennemløb

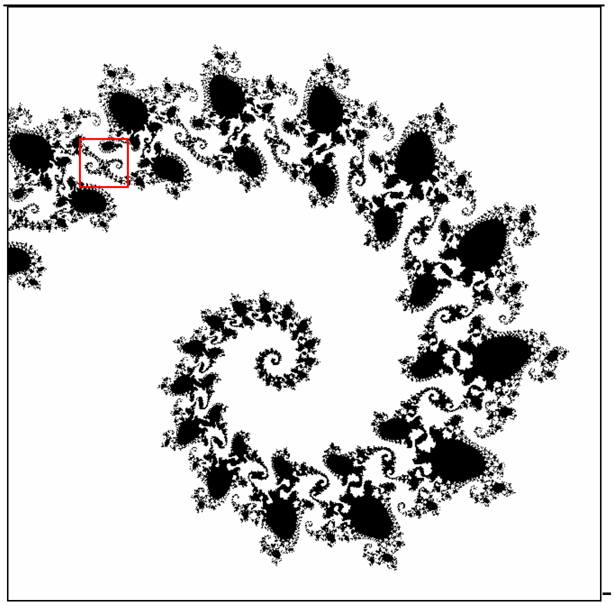
Figur 6b

4. På næste trin handler det om at zoome ind på udsnittet i det røde kvadrat. Nu bliver det nødvendigt at flytte zoom-feltet. Dertil skal du bruge piletasterne, event. sammen med CTRL (så flytter feltet sig hurtigere). Herunder skal du holde øje med tallene i rammen "Zoomfeltet" i højre kolonne. Brug først højre piletaste indtil x = -0,749898989899 og dernæst NED-pilen indtil y = 0,132727272727. Måske kan du ikke ramme de koordinater, jeg her har angivet, helt præcist (det kan være afhængigt af din skærms opløsning), men så må du prøve at komme så tæt som muligt. Størrelsen lader vi foreløbig blive, hvor den er, og det samme gælder antal gennemløb. Klik så på den pinkfarvede knap. Nu ser du figuren i næste billede, fig.6c. Bemærk søhestene med de snoede haler. Matematisk set handler det om logaritmiske spiraler (se min artikel om dette fascinerende emne og det tilhørende program LOGSPIR).



x = 0,749898989899;   y = 0,132727272727
side = 0,013333333333;   140 gennemløb
zoom = 225,00

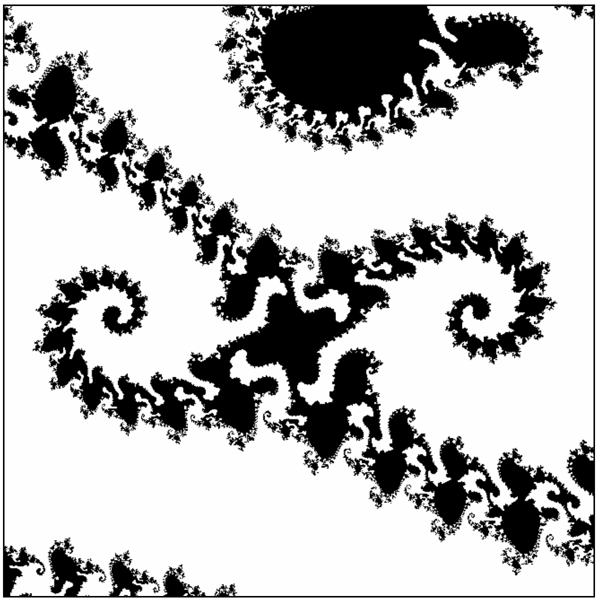
Figur 6c



x = -0,744976430976;   y = 0,122047138047
side = 0,001432996633,   140 gennemløb
zoom = 2093,52

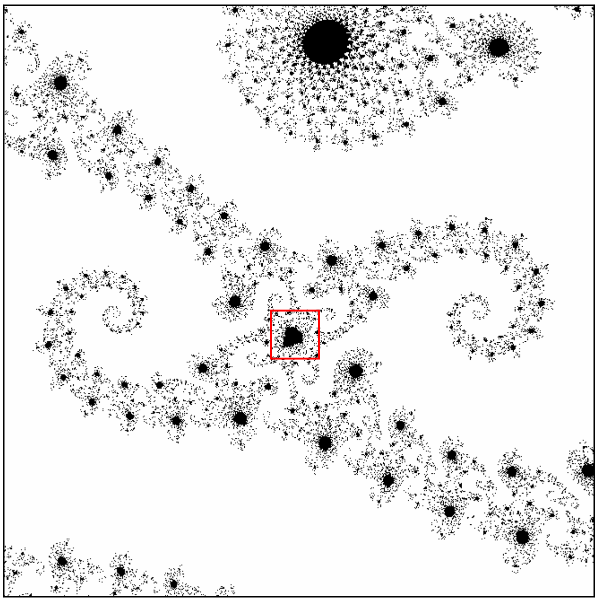
Figur 6d

5. På næste trin flytter du zoomfeltet ned til den søhestehale, der er indrammet af det røde kvadrat. x- og y-koordinaterne skal nu svarer til de tal der står under fig.6d. Her bliver det også nødvendigt at ændre zoomfeltets størrelse, dvs. sidelængden. Dertil bruges + og ÷ tasterne. I dette tilfælde skal der i tekstboksen "side" stå 0,001432996633 (eller så tæt derpå som muligt). Når du nu klikker på den pinkfarvede knap, får du dannet figur 6d..
6. Nu skal du zoome ind på den detalje, der er indrammet for oven til venstre. Brug de koordinater og den sidelængde, der er angivet i næste figur:



x = -0,744797668265;   y = 0,121721456994
side = 0,00010609965;   140 gennemløb
zoom = 28275,31

Figur 6e

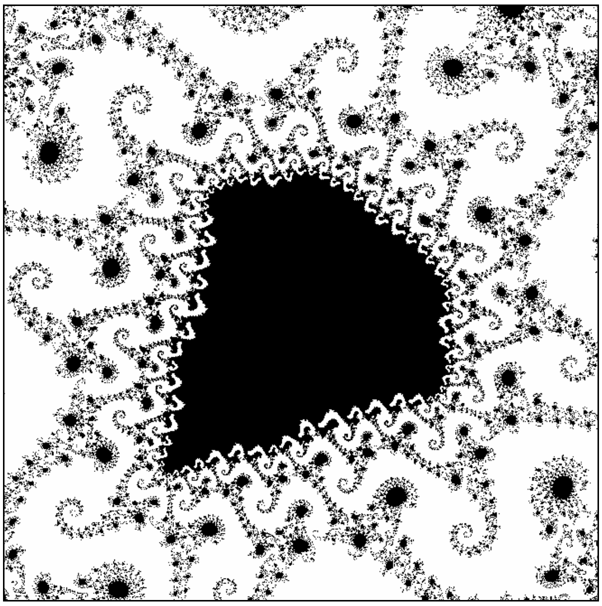


som foregående, men nu 300 gennemløb

Figur 6f

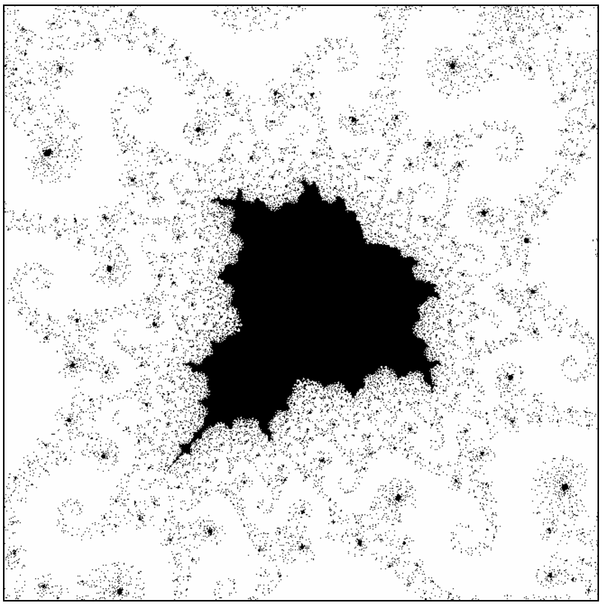
7. Indtil nu har antallet af gennemløb været 140; men der vil komme mange flere detaler med, hvis du nu sætter dette tal op til 300. Denne gang skal du altså ikke bruge zoom-funktionen, men du skal blot *gentegne* figuren, dvs. du skal klikke på den *røde* knap. Nu ser udsnittet ud som i fig.6f.

8. I centrum af sidste figur er der en ny kopi af den oprindelige figur. Den skal du nu zoome ind på, idet du bruger de koordinater og den sidelængde, der en angivet under fig.6g. Brug igen 300 gennemløb. Husk denne gang at klikke på den *pinkfarvede* knap.



x = -0,744749923423;   y = 0,121666263742
siden = 0,000007855661;   300 gennemløb
zoom = 381890,21

Figur 6g



som foregående, men nu 500 gennemløb

Figur 6h

9. Ved 300 gennemløb får vi dog kun en relativ grov tegning af Mandelbrot-kopien. Men prøv så at hæve antallet af gennemløb til 500 og gentegn figuren (*rød* knap). Resultatet ser du i fig.6h..

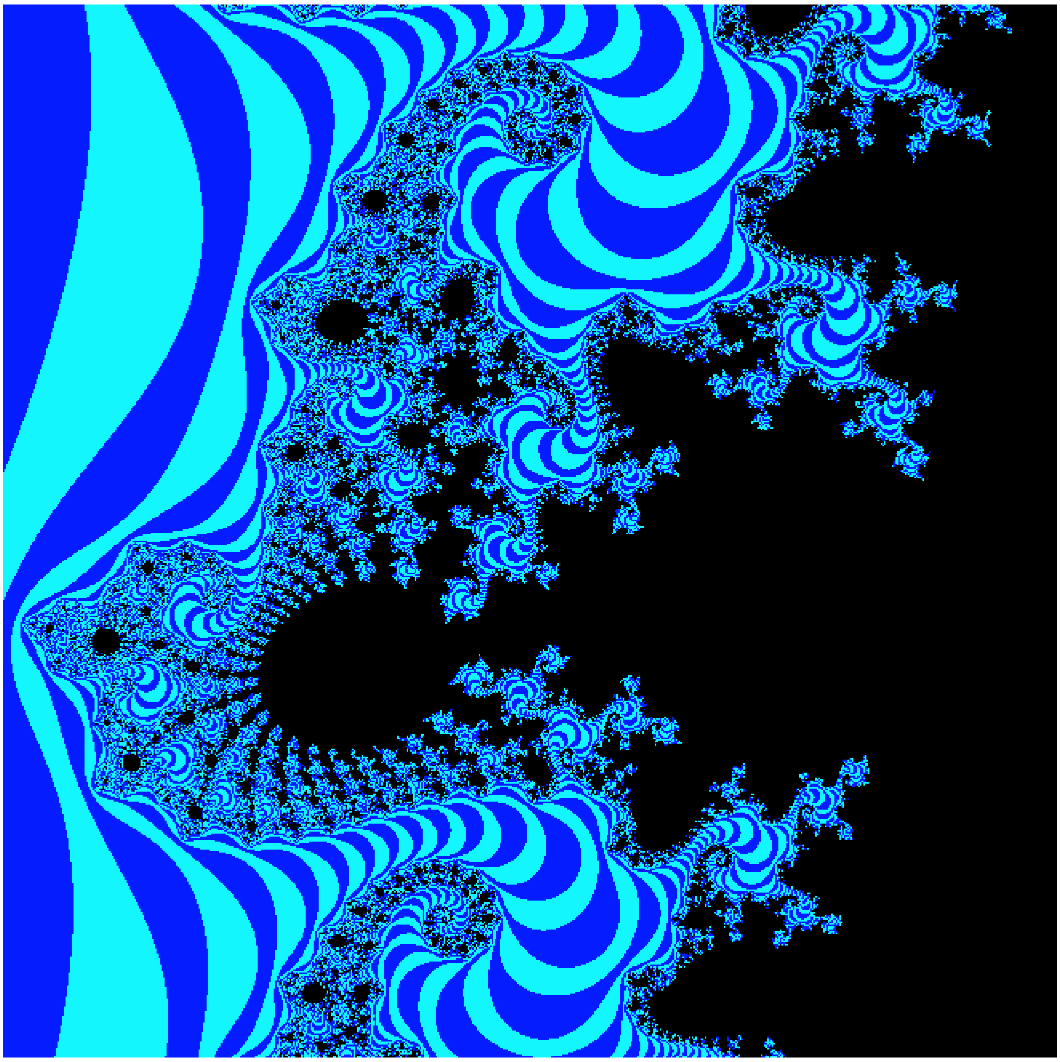
Nu kan du eventuelt selv zoome videre ind på nye detaljer. I det sidste billede nåede vi op på en forstørrelse på 381890,21 gange, men programmet kan sagtens klare en forstørrelse på adskillige milliarder. På min skærm er figuren ca. 22 cm. på hvert led. Det vil sige, at den oprindelige figur ved 1 milliard ganges forstørrelse er 220.000 km. på hvert led – altså ca. 2/3 af afstanden til Månen!

Men som allerede nævnt tager tegneprocessen længere og længere tid i takt med at man zoomer ind på mindre og mindre detaljer og hæver antallet af gennemløb.

En supplerende bemærkning om farvepaletten

Når farvepaletten eksempelvis er sammensat af 10 forskellige farver, betyder det, at disse 10 farver gentages i et kredsløb. Hvis den første farve er rød og den sidste farve er blå, så vil gennemløb nr.1 blive vist som rød og gennemløb nr.10 vil blive vist som blå. Derefter starter den samme rækkefølge igen: Nr.11 er rød og nr.20 er blå – nr.21 er rød og nr.30 er blå – nr.31 er rød og nr.40 er blå – osv.osv.

Det er langt fra sikkert, at billedet bliver bedre, fordi man vælger mange farver. I det næste billede, der er identisk med figur 6c, er der blot valgt to blå nuancer og baggrundsfarven er sort. Dermed træder nogle detaljer frem, som slet ikke var synlige før. Det er som om billedet har fået dybde, og fokus flyttes nu fra søhestehalerne til de snoede søjler, der spalter sig ud i flere og flere ligeledes snoede søjler, altimens de forsvinder ned i dybet. (se fig.7 på næste side)



Figur 7

En supplerende bemærkning om gemme / indsæt-funktionen

Når du bruger gemme-funktionen (knappen nederst til højre på skærmen), gemmes koordinaterne, sidelængden og antallet af gennemløb (men ikke farvepaletten) på din harddisk. De får automatisk extension ".man", der naturligvis står for Mandelbrot. Kalder du f.eks. billedet "figur 5", gemmes billedet som en fil med navnet "figur 5.man". Læg nøje mærke til, hvilken mappe, filen gemmes i, så du kan finde den igen. Bedst vil det være, hvis du selv opretter en ny mappe, der f.eks. kan hedde "Mine Mandelbrotfigurer".

Du vil så senere kunne finde denne fil igen ved hjælp af indsæt-funktionen (knappen ved siden af). Når du har fundet filen og klikker på OK, vil koordinaterne, sidelængden og antallet af gennemløb blive overført til programmet, og når du klikker på den røde knap, går tegneprocessen i gang. Vær opmærksom på, at figuren nu tegnes med den aktuelle farvepalet – men den kan du jo altid ændre, lige som du også kan ændre antallet af gennemløb.

En supplerende bemærkning om skærmopløsningen

Programmet er skrevet, så det passer til skærmopløsningen 1024 x 768. Du bør skifte til denne indstilling for at få det optimale udbytte af programmet. Det gøres sådan: Klik på "start"og derefter på "kontrolpanel". Her finder du ikonen "skærm"; dobbeltklik på den og vælg menuen "Indstillinger". Her sætter du skærmopløsningen 1024 x 768. Husk at flytte indstillingen tilbage til din egen standard, når du er færdig med at bruge programmet. Det tager kun ½ minut..