Jørgen Erichsen

Den logaritmiske spiral

en introduktion til computerprogrammet LOGSPIR

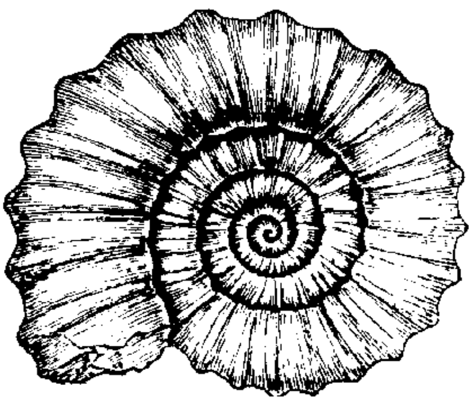
Kuno Fladt kalder i sin bog om plane kurver den logaritmiske spiral for "die interessanteste aller Spiralen und vielleicht die interessanteste aller ebenen Kurven." Forhåbentlig vil du også blive fascineret af denne kurve, når du åbner programmet **LOGSPIR** og selv begynder at manipulere med kurven. Vejledningen til programmet finder du i slutningen afdenne artikel (se side 10 -11).

Navnet den logaritmiske spiral går tilbage til den schweiziske matematiker Jacob Bernoulli (1654 - 1705), det ældste medlem af den berømte schweiziske matematiker-slægt; men kurven som sådan er første gang beskrevet af Descartes i en korrespondance med Mersenne (1638). Her hæftede Descartes sig ved, at vinklen mellem radius og tangent er den samme overalt på spiralen (en egenskab jeg nedenfor vil omtale lidt nærmere), og derfor foreslog han navnet *den ækviangulære spiral*. D'Arcy W. Thompson har i sin nedenfor omtalte bog *On Growth and Form* forsøgt at genoplive dette navn – men man må konstatere, at det er Bernouillis forslag, der har sejret.

Jacob Bernoulli var dybt fascineret af denne spiral, som han også kaldte *spira mirabilis,* den forunderlige spiral (spira betyder i øvrigt på latin *snoning*). Noget af det første, man bemærker, er, at den ikke har nogen begyndelse og heller ikke nogen ende – i den ene retning skruer den sig længere og længere ind mod 0 uden dog nogensinde at nå dette symbol på intetheden; i den anden retning vokser den mod ∞, symbolet på uendeligheden. En anden bemærkelsesværdig egenskab er, at den overalt er sig selv lig; zoomer vi ind på en af de mikroskopiske detaljer, eller nedfotograferer vi en spiral, der er så stor, at den rækker fra Jorden til Månen, vil vi ikke se nogen forskel – dog forudsat at vi taler om spiraler med samme grundtal. Man kan nogle steder læse, at det var i den sidstnævnte egenskab Jacob Bernoulli så den symbolik, der fik ham til at beslutte, at der på hans gravsten skulle indhugges en logaritmisk spiral, tillige med indskriften

Eadem numero mutata resurgo

eller i en fri oversættelse: Forvandlet genopstår jeg som den samme (egl. ved de samme tal). Det var imidlertid en anden egenskab, Bernoulli her hentydede til: Den logaritmiske spiral er både sin egen katakaustik (dvs. brændlinje ved refleksion) og sin egen diakaustik (dvs. brændlinje ved refraktion) – en opdagelse Bernoulli gjorde i 1692. Desværre forstod stenhuggeren sig ikke på matematik, så i Basels domkirke kan man den dag i dag se Jacob Bernoullis gravsten udsmykket med – ikke en logaritmisk, men en arkimedisk spiral!

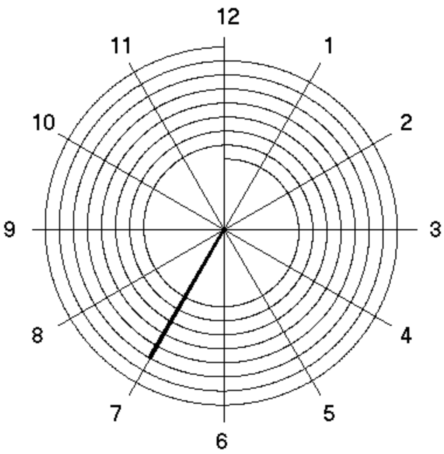


I sin dybt fascinerende bog *On Growth and Form* (1.ed. 1917, seneste genudgivelse 1992) påviser D'Archy W. Thompson, at den logaritmiske spiral fungerer som en art matrice for visse former for biologisk vækst, og ved målinger har han fundet frem til hvilke grundtal, der svarer til de forskellige former (normalt er det ikke-heltallige grundtal). Sneglehuse og konkylier er almindeligt kendte eksempler herpå, men spiralen dukker i mere eller mindre skjult form op mange andre steder i såvel plante- som dyreriget. Billedet til venstre herfor er en ammonit, dvs. skallen fra en uddød blæksprutteart, der levede i jura- og kridttiden (det viste eksemplar ejes af forfatteren).

Det polære koordinatsystem

Den logaritmiske spirals særlige egenskaber træder først tydeligt frem, når vi afbilder den i det polære koordinatsystem. Selv om du allerede er fortroligt med det polære koordinatsystem, vil jeg alligevel anbefale, at du læser dette afsnit, hvor jeg ser tingene i et lidt andet perspektiv, end du måske er vant til.

For at forstå princippet i det polære koordinatsystem kan man begynde med at tænke på et ur. Et ur er i princippet en målestok, der er delt i to forskellige tidsenheder, nemlig ”halve døgn” og timer (reelt er enheden dog et helt døgn, og logisk set burde urskiven derfor ikke være inddelt i 12, men i 24 timer). Det specielle ved uret er, at målestokken er formet som en cirkel, således at længden af den større enhed, altså ”halve døgn”, er lig med cirklens omkreds. På den måde er det kun forløbet af mindre enheder, altså timerne, der umiddelbart giver sig udslag på målestokken; de primære enheder må vi holde regnskab med ved løbende at opsummere, hvor mange gange timeviseren har gennemført en hel omdrejning.



Figur 1

Men hvis vi i stedet indretter urskiven som en spiral, og hvis vi konstruerer viseren, så den til stadighed peger på det aktuelle punkt på spiralen, så vil vi også være i stand til at aflæse hvor mange ”halve døgn”, der er forløbet, siden vi begyndte at måle tiden. Fig.1 viser et sådant ur, der fungerer gennem 8 kredsløb. Hvis vi siger, at disse går fra mandag kl. 0 (midnat) til fredag kl. 0, kan vi hurtigt tælle os frem til, at viseren på uret fortæller, at klokken er 7 onsdag aften.

Dette er et eksempel på princippet i det polære koordinatsystem. Hvor i det retvinklede koordinatsystem begge koordinater udtrykkes som afstanden fra det fælles nulpunkt (0,0), udtrykkes i det polære koordinatsystem den ene koordinat som et vinkelmål, mens den anden koordinat fortsat udtrykkes som afstanden fra nulpunktet. Nulpunktet kaldes her *polen,* og et punkts afstandskoordinat er identisk med radien fra polen til punktet (strengt taget hedder det i denne forbindelse ikke en radius men en *radiusvektor*). Vinkelkoordinaten måles fra en given radius, kaldet *polaraksen* – ikke nødvendigvis i grader (hvor et helt kredsløb svarer til 360°), for det er som regel mere hensigtsmæssigt at regne i radianmål (hvor et helt kredsløb er lig med 2π) eller i cykliske mål (hvor enheden defineres som helt kredsløb). På figuren er polaraksen den radius, der peger mod tallet 12.

Læg mærke til at tidspunkterne ”klokken 7 mandag morgen”, ”klokken 7 mandag aften”, ”klokken 7 tirsdag morgen” osv. alle er defineret ved samme vinkelmål ± et nærmere bestemt antal hele kredsløb. Lad os til sammenligning udtrykke vinkelmålet i alle tre enheder – først i grader, så i radianer og så i cykler (og der kan næppe være tvivl om, hvilken af de tre måleenheder, der giver det simpleste regnearbejde):

1. $^{7}/_{12} \cdot 360° \pm n \cdot 360°$ (= $210° \pm n \cdot 360°$)
2. $^{7}/_{12} \cdot 2\pi \pm n \cdot 2\pi$ (= $^{7}/_{6} \cdot \pi \pm n \cdot 2\pi$)
3. $^{7}/_{12} \pm n$

Specielt er det tidspunkt, viseren peger på i figuren, altså ”klokken er 7 onsdag aften” defineret ved vinkelmålet

1. $210° + 5 \cdot 360° = 2010°$
2. $^{7}/_{12} \cdot 2\pi + 5 \cdot 2\pi = {}^{67}/_{6} \cdot \pi$
3. $^{7}/_{12} + 5 = {}^{67}/_{12}$

Den her beregnede vinkel, hvor det aktuelle punkt passeres mere end én gang, kaldes *rotationsvinklen*, mens den vinkel, der angiver hvornår punktet første gang passeres, kaldes *retningsvinklen*. Det er vigtigt at huske disse betegnelser, for vi får brug for dem i det følgende. Regner vi med cykliske mål, har vi:

rotationsvinklen = retningsvinklen + antallet af hele kredsløb

Matematikeren orienterer imidlertid det polære koordinatsystem på en anden måde end vist i fig.1. For det første måles vinklen ud fra den linje, der i fig.1 peger mod 3; for det andet måles vinklen modsat urviserens bevægelse, altså venstre om. Sådan er de følgende figurer også orienterede.

Den arkimediske spiral

En spiral, hvor afstanden fra vinding til vinding er konstant, kaldes *en arkimedisk spiral* – den blev nemlig første gang beskrevet af Arkimedes. Det er den spiral, der er vist i figur 1. Vi kender den også som rillen på en grammofonplade eller som en papirrulle. En af fordelene ved at benytte det polære koordinatsystem er, at formlen på cykliske kurver bliver stærkt forenklet i forhold til hvordan den tilsvarende formel ser ud i det retvinklede koordinatsystem. Symboliserer vi afstandskoordinaten ved bogstavet r og vinkelkoordinaten ved bogstavet v, er den arkimediske spiral beskrevet ved denne simple ligning:

$$r = v \quad \text{eller omvendt} \quad v = r$$

hvad der udtrykt i ord blot betyder, at afstanden vokser proportionalt med vinklen (og omvendt). Det betyder også, at afstanden mellem spiralens vindinger, også kaldet *stigningen*, overalt er den samme (normalt plejer man i formlen at tilføje en konstant, der angive hvor stor stigningen er, udtrykt i forhold til de anvendte enheder).

Et andet eksempel på den forenkling brugen af det polære koordinatsystem medfører er i øvrigt cirklen. Dens ligning bliver her: r = a, hvor a nu ikke er en variabel, men en konstant, og hvor vinklen altså overhovedet ikke spiller nogen rolle; i ord står her blot, at afstanden fra polen – altså det vi normalt vil kalde centrum – til et punkt på cirklen overalt er den samme.

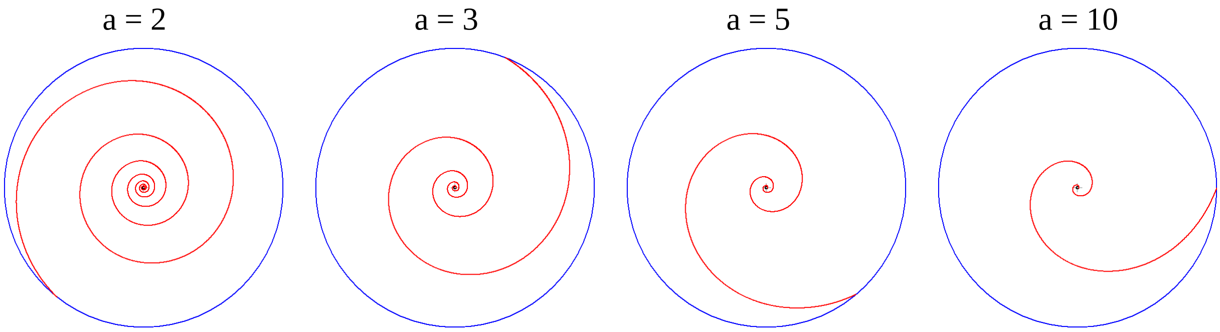
Den logaritmiske spiral

Men der er andre typer af spiraler, hvor afstanden mellem vindingerne er voksende eller aftagende, og her skal det som sagt handle om *den logaritmiske spiral*, hvor forholdet mellem afstandskoordinaten og vinklen er udtrykt i følgende to ligninger, afhængig af om omregningen mellem de to variable finder sted i den ene eller anden retning:

$$r = \mathrm{a}^{v} \quad \text{eller omvendt} \quad v = \log_{\mathrm{a}} r$$

Udtrykt i ord står her, at afstandskoordinaten vokser eksponentielt med vinkelkoordinaten – eller omvendt at vinkelkoordinaten vokser logaritmisk med afstandskoordinaten, idet grundtallet eller basis i begge tilfælde er a.

Jo større grundtallet er, desto mere åbner spiralen sig for hver vinding eller kredsløb. Når grundtallet er 2, som i den første af spiralerne i figur 2, fordobles afstanden for hvert kredsløb, er grundtallet 3, tredobles afstanden og så fremdeles. Figur 2 viser også spiralerne med grundtallet 5 og 10. I alle fire eksempler begynder spiralen ved r = 1 og slutter ved r = 100. Disse tegninger er genereret i programmet LOGSPIR. Den sorte cirkel i midten af figuren (som i denne stærkt formindskede gengivelse mere ligner en prik) markerer, hvor spiralen begynder, den blå cirkel markere, hvor den ender.

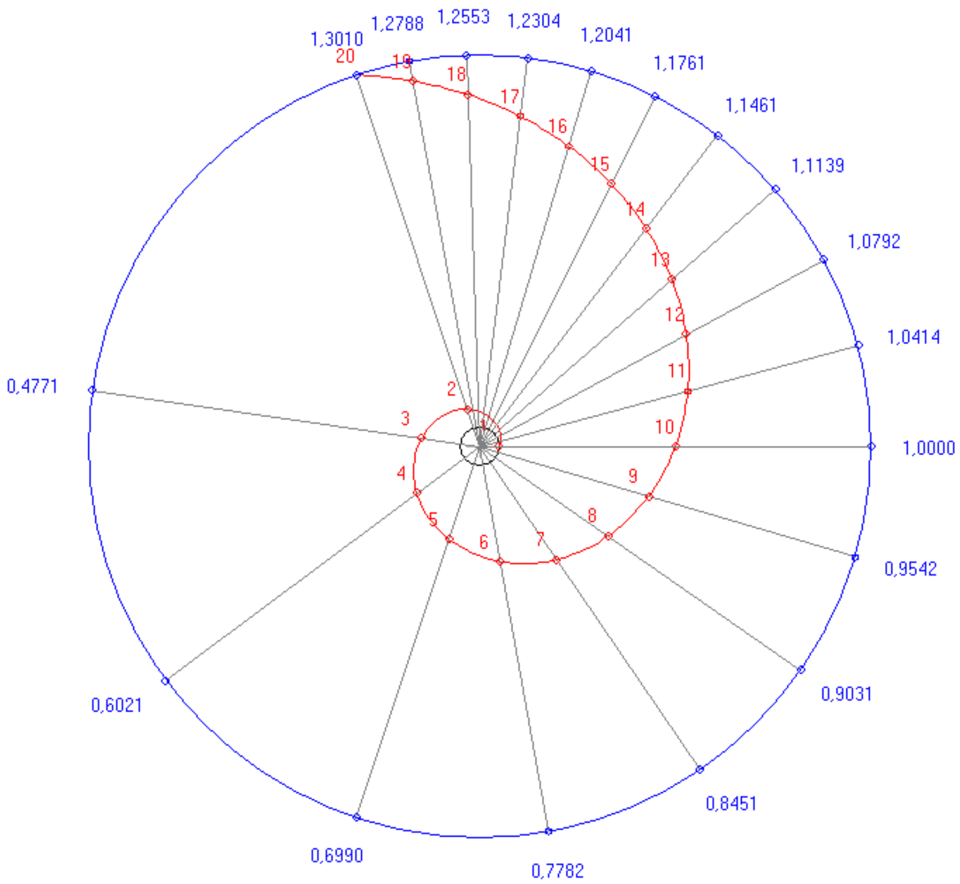


Figur 2

Lad os nu se nærmere på det sidste eksempel, hvor grundtallet er 10. Det illustrerer nemlig forholdet mellem det talsystem, vi normalt bruger, altså 10-tal systemet, og de tilhørende logaritmer. Og hvis du aldrig helt har forstået, hvad logaritmer egentlig drejer sig om, så bliver det her forklaret på en måde, så alle kan være med.

Men først må jeg lige indskyde, at talrækken i sig selv ikke udgør et talsystem. Et talsystem er der først tale om, når talrækken forbindes med et periodisk princip. Et sådant princip blev allerede ubevidst indført, da vore fjerne forfædre lagde de 10 fingre til grund for tællen og regnen. Men det var først langt senere man indså, at der var tale om et ordningsprincip, og det var først et stykke op i det 17. århundrede man opdagede, at selve ordningsprincippet kan bruges til at lette udregningerne med – nemlig i form af det, vi kender som logaritmeregning.

I den næste figur ser vi igen den logaritmiske spiral, der er baseret på grundtallet 10. Denne gang følger vi spiralen fra r = 1 til r = 20. Husk at begyndelsespunktet svarer til ”klokken 3” på uret, og at vi måler venstre om.



Figur 3

Også denne figur er genereret i programmet LOGSPIR. Hvert tals placering på spiralen er markeret med en rød plet. På spiralen er afstanden mellem to nabotal overalt den samme, men som det ses, bliver vinklen imellem dem gradvis bliver mindre og mindre. Vinkelafstanden fra begyndelsespunktetet er på den ydre blå cirkel udtrykt som en decimalbrøk, hvor tallet 1 svarer til et helt kredsløb. For at udtrykke vinklerne i gradmål skal vi altså blot gange disse decimalbrøker med 360; eksempelvis finder vi gradmålet for tallet 3 som $0{,}4771 \cdot 360° = 171{,}76°$.

Gradmålet interesserer os imidlertid ikke så meget her. *Pointen er nemlig, at de omtalte decimalbrøker (de blå tal) simpelthen er logaritmerne til tallene inde på spiralen (de røde tal)*! På figuren kan vi umiddelbart aflæse, at logaritmen til 3 er 0,4771, logaritmen til 4 er 0,6021, logaritmen til 5 er 0,6990 og så fremdeles. Du kan eventuelt kontrollere det på din lommeregner – eller i en gammeldags logaritmetabel, hvis du ejer sådan én.

Vi så tidligere, at

rotationsvinklen = retningsvinklen + antallet af hele kredsløb

Det kan vi nu oversætte til ”logaritmesprog”. Her kaldes tallet foran kommaet for *karakteristikken* (af græsk *charakteristikos*, der betyder 'det som er kendetegnende') og decimaldelen kaldes for *mantissen* (af græsk *mantissa*, der betyder 'tilføjelse'). Mantissen svarer til retningsvinklen, mens karakteristikken angiver antallet af hele kredsløb. I ”logaritmesprog” bliver ovenstående sætning altså til:

logaritmen = mantissen + karakteristikken.

I eksemplet figur 3 ser vi, at logaritmen til 20 er 1,3010. Vi ser også, at tallet 2 ligger på samme radius, hvilket er ensbetydende med, at 2 har samme mantisse som 20. Men tallet 2 ligger endnu inden for det første kredsløb, og karakteristikken er derfor 0. Logaritmen til 2 er altså 0,3010. Fortsætter vi videre ud ad spiralen, vil vi se, at også 200, 2000, 20000 osv. ligger på samme radius, altså har samme mantisse. Men idet vi for hvert af disse tal bevæger os ind i et nyt kredsløb, vokser karakteristikken løbende med 1.

Lad os for overblikkets skyld sætte det op i en tabel:

logaritmen til 2	er	0,3010
logaritmen til 20	er	1,3010
logaritmen til 200	er	2,3010
logaritmen til 2000	er	3,3010
logaritmen til 20000	er	4,3010

En tilsvarende tabel kan vi opstille for ethvert andet tal, og det gælder vel at mærke ikke kun de hele tal.

Fra skolen husker vi, at regning med logaritmer bl.a. består i, at man i stedet for at multiplicere to tal adderer deres logaritmer, mens man omvendt subtraherer deres logaritmer i stedet for at dividere dem. Det kan også anskueliggøres på figur 3.

Lad os som eksempel se på regnestykket $4 \cdot 5 = 20$. De to tals logaritmer kan vi aflæse på figuren, og vi skal nu blot lægge dem samme: 0,6021 + 0,6990 = 1,3011. Den resulterende logaritme finder vi netop ud for tallet 20; det svarer til at man i en logaritmetabel finder den såkaldte antilogaritme (afvigelsen på sidste decimal skyldes naturligvis, at vi her kun regner med tilnærmede værdier).

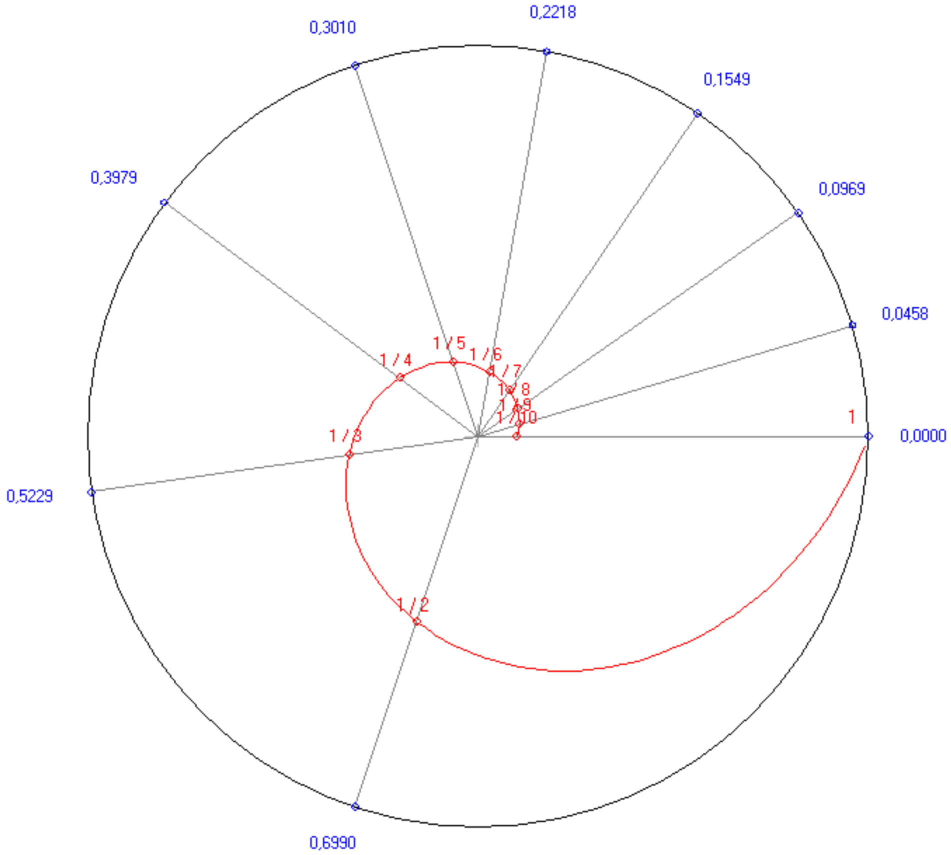
På samme måde ser vi, at divisionen 12 / 4 = 3 svarer til subtraktionen 1,0792 – 0,6021 = 0,4771. Vi husker også, at en potensopløftning bliver til en multiplikation, og som eksempel ser vi, at

0,4771 · 2 = 0,9542, svarende til at $3^2 = 9$. Desuden bliver en roduddragning til en division, og her ser vi som eksempel, at 1,2041 / 2 = 0,6021, hvilket svarer til at $\sqrt{16} = 4$.

*   *   *

Lad os nu se, hvad der sker, når vi bevæger os indad i spiralen, dvs. fra 1 og ned mod 0. Dermed bevæger vi os ind mod spiralens centrum, men ligesom der ikke findes et største tal, findes der heller ikke et mindste tal, dvs. vi vil aldrig nå ind til centrum, lige meget hvor mange spiralkredsløb, vi bevæger os igennem.

Den næste figur viser spiralen mellem 1 og 1/10, dvs. de reciprokke tal til tallene fra 1 til 10.



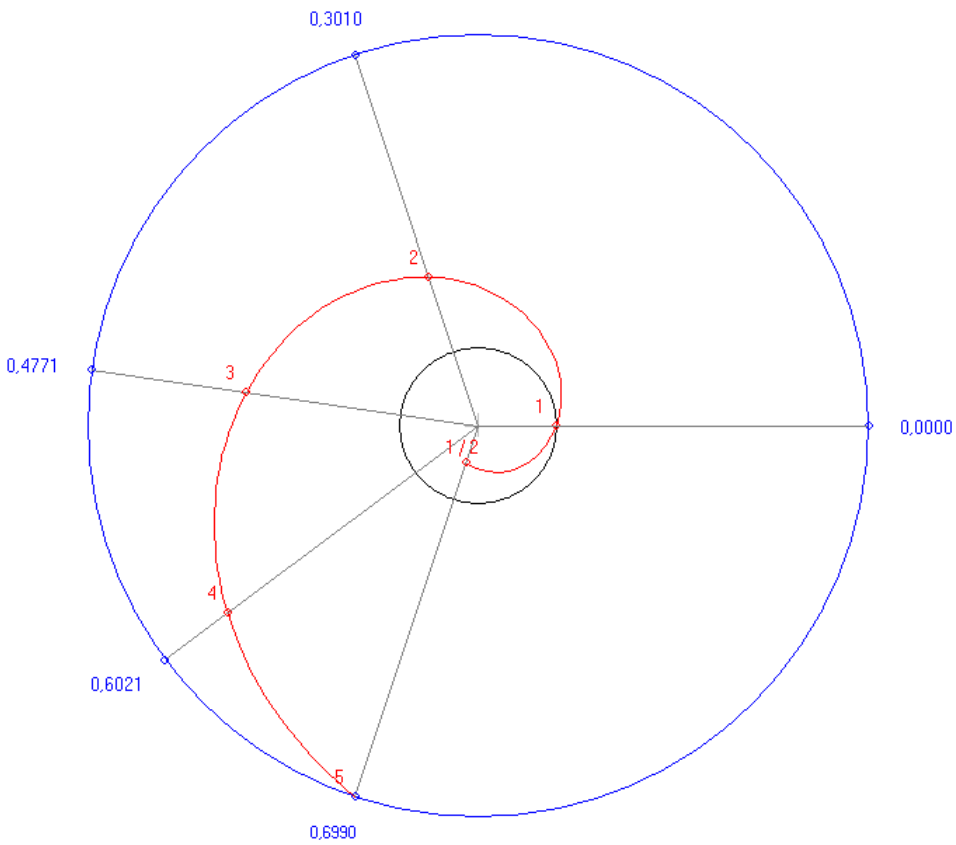
Figur 4

Her har jeg med vilje indstillet programmet, så det tilsyneladende genererer de forkerte logaritmer. For det kan jo ikke passe, at logaritmen til ½ er det samme som logaritmen til 5 (sml. fig.3). Men på den næste figur, fig.5 der omfatter spiralen fra ½ til 5, kan vi se, at de to tal ligger på samme radius, og dermed har de også samme mantisse (husk at mantissen er defineret som logaritmen til det af de pågældende tal, der ligger inden for det første *positive* kredsløb, altså mellem 1 og 10, også kaldtet hovedintervallet). Det er altså mantisserne, der er genereret i fig.4, og vi skal så blot bruge reglen om at lægge 1 til for hvert kredsløb, vi bevæger os udad gennem spiralen, og trække 1 fra. for hvert kredsløb, vi bevæger os indad gennem spiralen.

Men når vi i indadgående retning passerer begyndelsepunktet, sker der et fortegnsskifte. Det fremgår af den følgende tabel, hvor vi kan følge udviklingen i begge retninger:

logaritmen til 5000	er	0,6990 + 3 = 3, 6990
logaritmen til 500	er	0,6990 + 2 = 2, 6990
logaritmen til 50	er	0,6990 + 1 = 1, 6990
logaritmen til 5	er	0,6990
logaritmen til 0,5	er	0,6990 – 1 = –0,3010
logaritmen til 0,05	er	0,6990 – 2 = –1,3010
logaritmen til 0,005	er	0,6990 – 3 = –2,3010

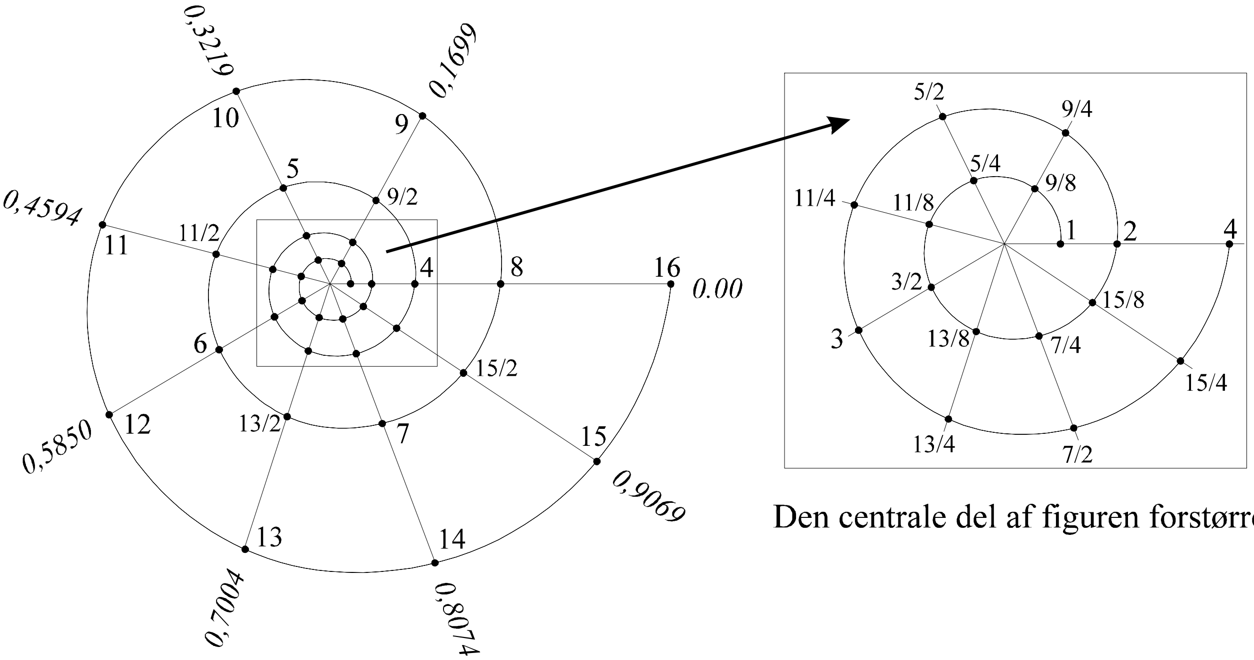
Deraf følger, at logaritmen til et tal, der er mindre end 1, er negativ. Derimod giver det ingen mening at tale om logaritmen til et negativt tal; det fremgår også af figuren, hvor grænsen indadtil jo er bestemt ved tallet 0.



Figur 5

Når man skal anskueliggøre den logaritmiske spirals generelle egenskaber, er det ikke særlig hensigtsmæssigt at vælge spiralen med grundtallet 10, fordi den allerede efter 3 kredsløb vokser så meget, at det første kredsløb ikke længere kan skelnes klart. For at give et bedre overblik over tallenes placering gengiver jeg derfor nedenfor nogle udsnit af den logaritmiske spiral med grundtallet 2. De er lavet i et almindeligt tegneprogram – unægtelig et ret tidskrævende arbejde i sammenligning med de computergenererede figurer, som tegnes på en brøkdel af et sekund!

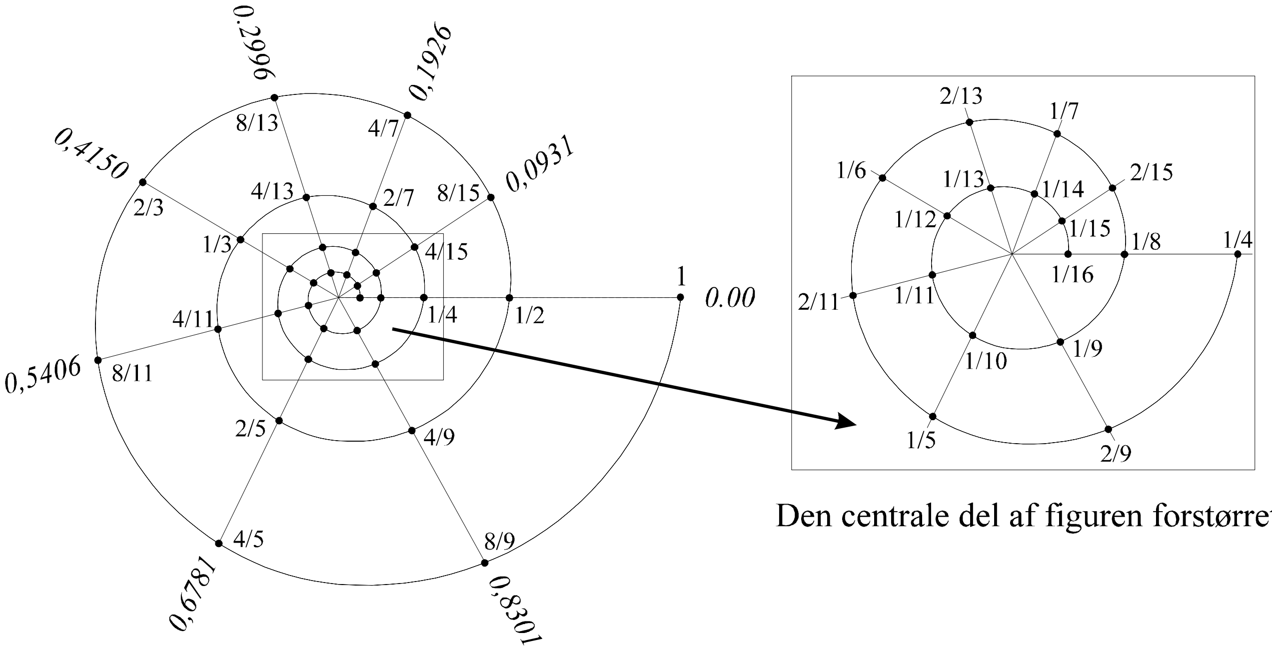
På den første tegning er tallene indsat for samtlige skæringspunkter mellem spiralen og radierne gennem tallene fra 1 til 16. I forlængelse af radierne er mantisserne anført. Dermed får vi ikke blot de hele tal placeret, men også en række brøker, nemlig de brøker, hvis nævner er en potens af 2. Den centrale del af figuren er desuden vist i forstørrelse for at få alle detaljer med.



Den centrale del af figuren forstørret

Figur 6

På den næste tegning handler det om skæringspunkterne på den del af spiralen, der ligger mellem 1 og 1/16. Også her er den centrale del forstørret. Bemærk at radierne i fig.7 er spejlvendte i forhold til radierne i fig.6.



Den centrale del af figuren forstørret

Figur 7

At grundtallet er 2 betyder, at vi nu har at gøre med 2-talsystemet. Det er det simpleste af alle talsystemr, fordi ethvert tal her kan udtrykkes med blot to forskellige symboler, 0 og 1 Det er som bekendt også 2-talsystemet, der ligger til grund for computerteknologien. I og med at tallenes beliggenhed på spiralen nu er defineret ved nogle helt andre vinkelafstande, er også tallenes logaritmer forskellige fra de logaritmer, vi før regnede med. Men selve regnereglerne gælder stadig.

Prøv f.eks. at udføre regnestykket 3 · 5 = 15 ved at addere logaritmerne for 3 og 5, sådan som de kan aflæses i figur 6. Her ser vi, at mantisserne er hhv. 0,5850 og 0,3219. Men dertil skal lægges karakteristikken, som vi finder ved at tælle hvor mange gange vi passerer polaraksen (den linje, hvor vi har tallene 1, 2, 4, 8, 16 osv), før vi kommer til det pågældende tal. Dermed kommer regnestykket til at se sådan ud:

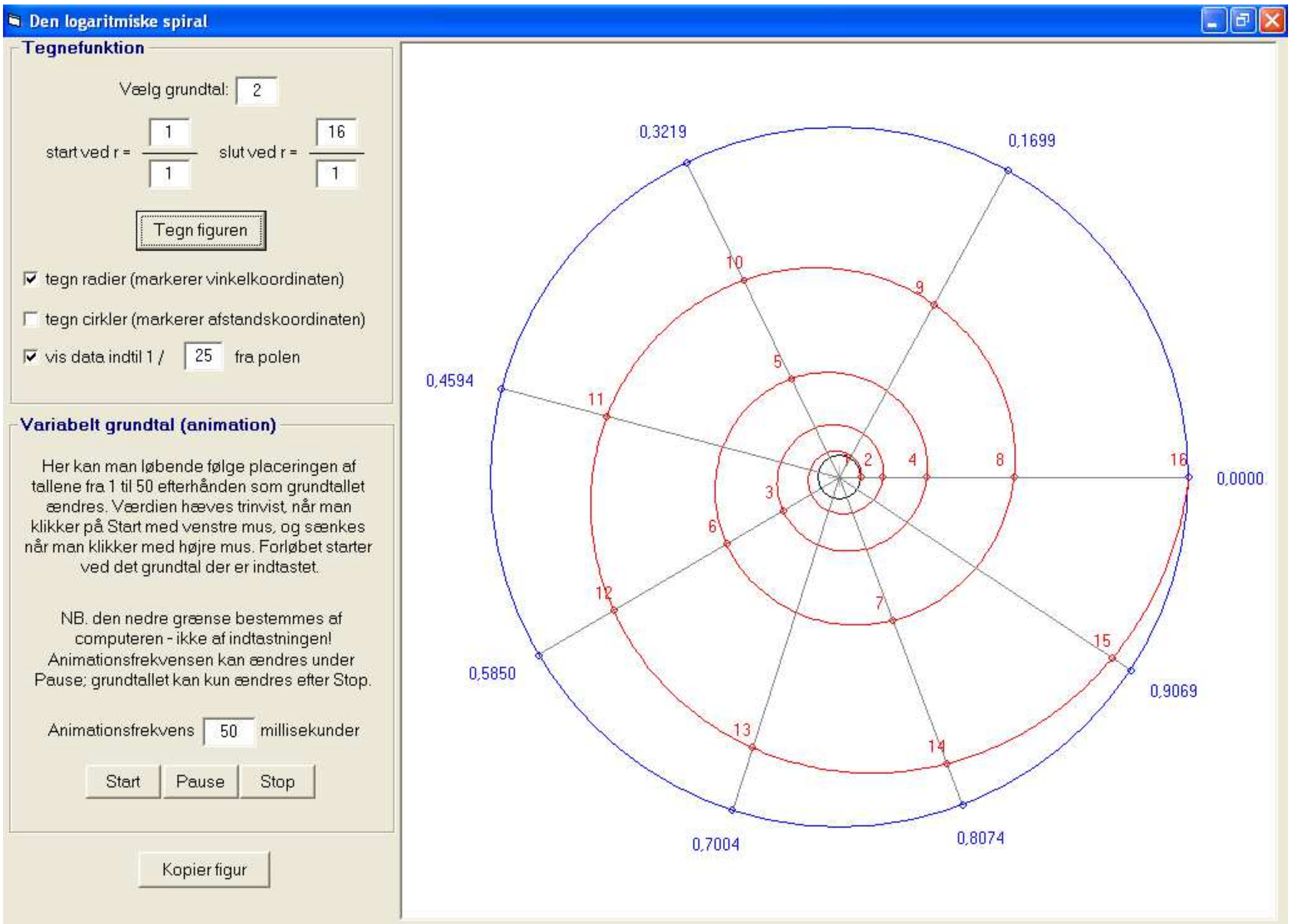
$$1,5850 + 2,3219 = 3,9069$$

Derefter opsøger vi den radius, ud for hvilken der står 0,9069, og endelig følger vi spiralen, indtil vi har passeret polaraksen 3 gange – hvorved vi kommer til tallet 15.

Den logaritmiske spiral med grundtallet 2 er i øvrigt identisk med **tonespiralen**, som jeg har beskrevet i en artikel og et program, der senere vil blive lagt ud på nettet. Her fortolkes et kredsløb som en oktav, idet denne jo netop akustisk er defineret ved at frekvenstallet fordobles. Tallene fortolkes nu som frekvenstal, og en virtuel tonegenerator, der indgår i programkoden, gør det muligt at realisere frekvenstallene som lyd.

Se vejledningen på de to følgende sider

Vejledning i brug af computerprogrammet LOGSPIR

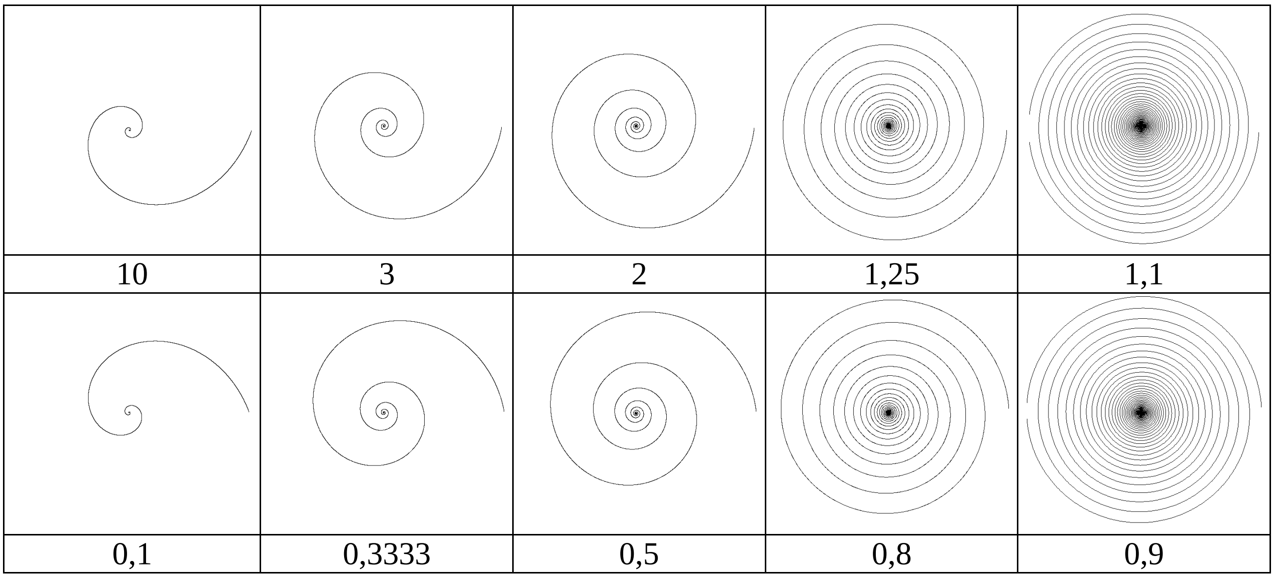


Figur 8

Når du åbner programmet og har klikket på knappen ”Tegn figuren”, ser du ovenstående billede på skærmen. Spiralen genkender du i billedfeltet til højre, og til venstre indtaster du de forskellige værdier samt vælgerm hvordan figuren skal vises.

Men før du overhovedet begynder at indtaste data, vil jeg foreslå, at du kører en lille ”film”, som demonstrere hvordan spiralen ændrer form i takt med at grundtallet hæves eller sænkes. ”Filmen” styres med de tre knapper Start Pause Stop , du finder i rammen ”Variabelt grundtal (animation)”. Fremgangsmåden er beskrevet i den tekst, der er indsat i rammen. Mens ”filmen” kører, kan du følge grundtallets ændring i billedfeltet nederst til venstre. Læg mærke til, at grundtallet udmærket kan være en brøk (her altid vist som en decimalbrøk). Læg også mærke til, at når grundtallet nærmer sig 1, begynder figuren at opføre sig kaotisk. Her sker nemlig det, at afstanden mellem spiralens arme bliver meget små, og når grænsetilfældet nås, hvor afstanden er 0, har vi reelt at gøre med en cirkel. Dette grænsetilfælde vil imidlertid bevirke at programmet ”går ned”, og derfor er der i programkoden indsat en betingelse, der forhindrer at grundtallet kan blive 1.

Læg specielt mærke til at spiralen med grundtallet 1/n er et spejlbillede af spiralen med grundtallet n. Her følger nogle eksempler, hvor jeg dog af letforståelige grunde har undladt at medtage tallene: (det gøres ved at fjerne afmærkningen i checkboksen ”Vis data”).



Figur 9

Programmets øvrige funktioner kræver kun en kort forklaring. Det hele foregår fra rammen med overskriften ”Tegnefunktion”. Her indtaster du

1. grundtallet (hvis det er en decimalbrøk, skal du bruge punktum i stedet for komma!)
2. det tal, hvor spiralen skal begynde
3. det tal, hvor spiralen skal slutte

De to sidstnævnte kan i princippet både være hele tal og brøker, men for at gøre brugerfladen så enkel som mulig, har jeg valgt, at man under alle omstændigheder indtaster tallet som en brøk, idet man så sætter nævneren lig med 1, når der reelt er tale om et helt tal. I eksemplet figur 8 er grundtallet 2, spiralen begynder ved 1 og slutter ved 16.

Hvis du eksempelvis ønsker at tegne den del af spiralen, der er vist i det forstørrede udsnit i figur 7, skal startværdien være 1 / 16 og slutværdien skal være 1 / 4.

Uanset hvilken del af spiralen du vælger, og uanset hvilket grundtal du vælger, får figuren altid den samme størrelse. Man kan således sige, at man zoomer ind eller ud på spiralen, alt efter hvor mange kredsløb man vælger at medtage, og alt efter om man befinder sig i den lave eller den høje del af talrækken.

Du kan fravælge at få tegnet radierne, og du kan tilvælge at få tegnet afstandscirklerne (eller du kan vælge både radier og afstandscirkler). Hvordan det fungerer finder du bedst ud af ved at afprøve det. Desuden kan du fravælge at få vist tallene. Her har jeg tilføjet en boks, hvor du specielt kan fjerne tallene nær centrum. Det er fordi disse begynder at flyde sammen, når der er medtaget mange kredsløb. Hvordan det fungerer kan du også bedst finde ud af ved at afprøve det.

Med knappen ”Kopier figur” overfører du billedet til computerens udklipsholder, hvorfra du så kan sætte det ind i et WORD-dokument, et tegneprogram eller lignende.

Ligesom i mine andre programmer er alle indtastningsbokse blokeret for indtastning af ikke-gyldige tegn (f.eks. bogstaver), som ellers ville bevirke at programmet ville ”gå ned”.