Jørgen Erichsen

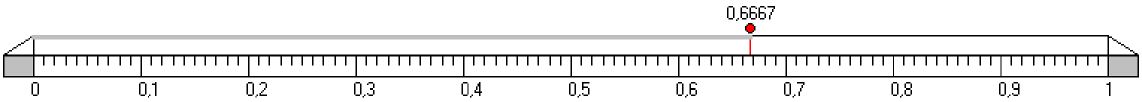
En virtuel monokord

Beskrivelse af og forsøg med programmet SUPERMONOKORDEN

Ifølge overleveringen, som dog nok mere er en legende end en historisk kendsgerning, var det Pytagoras, som opdagede, at der er en forbindelse mellem musik og matematik. I en af versionerne hedder det, at Pytagoras en dag kom forbi et smedeværksted, og at han bemærkede, at de tre hamre, som var i brug, dannede en perfekt treklang. Da han bad om lov til at veje hamrene, viste det sig, at deres vægt forholdt sig til hinanden som 4 : 5 : 6. Han antog nu, at noget lignende måtte være tilfældet med toner, som frembringes ved at en streng sættes i svingninger; her spiller vægten naturligvis også ind, men så længe vi bruger den samme streng, er det alene dennes længde, som bestemmer tonehøjden. For nu at udforske sin opdagelse mere systematisk, udspændte Pytagoras en streng mellem to støttepunkter, der var anbragt for enderne af et bræt, og mellem brættet og strengen anbragte han en forskydelig stol (altså en anordning som den vi kender fra en violin eller andet strygeinstrument). Efterhånden som han flyttede stolen ændredes tonehøjden, og ved nu at måle længden af den svingende del af strengen, fik han forbundet de forskellige intervaller med bestemte tal. Det er dette simple måleinstrument, som kaldes en *monokord* (der på græsk betyder *énstreng*). Som videnskabeligt måleinstrument er monokorden for længst gået af brug, men til undervisningsbrug finder den stadig anvendelse.

Efter at jeg selv havde haft lejlighed til at eksperimentere med en monokord, skrev jeg for snart mange år siden et computerprogram, som simulerer en monokord, og da programmet er udstyret med en række funktioner, som gør det muligt at trænge langt dybere ned i toneforholdenes matematik, end det er tilfældet med en almindelig monokord, kalder jeg programmet SUPERMONOKORDEN. Det er den, det i det følgende skal handle om.

I sin klassiske udformning består monokorden (navnet er græsk og betyder *én-streng*) af en streng, der er udspændt mellem to faste støttepunkter, som er anbragt på et bræt eller en resonanskasse. Mellem brættet og strengen er anbragt et forskydeligt støttepunkt, som vi vil kalde *skyderen*. Den tone som fremkommer, når strengen svinger i sin fulde længde, vil vi kalde *basistonen* (ikke at forveksle med *grundtonen*, som er knyttet til begreberne ‘skala’ og ‘toneart’). Idet skyderen nu deler strengen i to, er forholdet mellem den del, der sættes i svingninger, og hele strengen, et talmæssigt udtryk for intervallet mellem den aktuelt klingende tone og basistonen. Vores virtuelle monokord ser sådan ud:

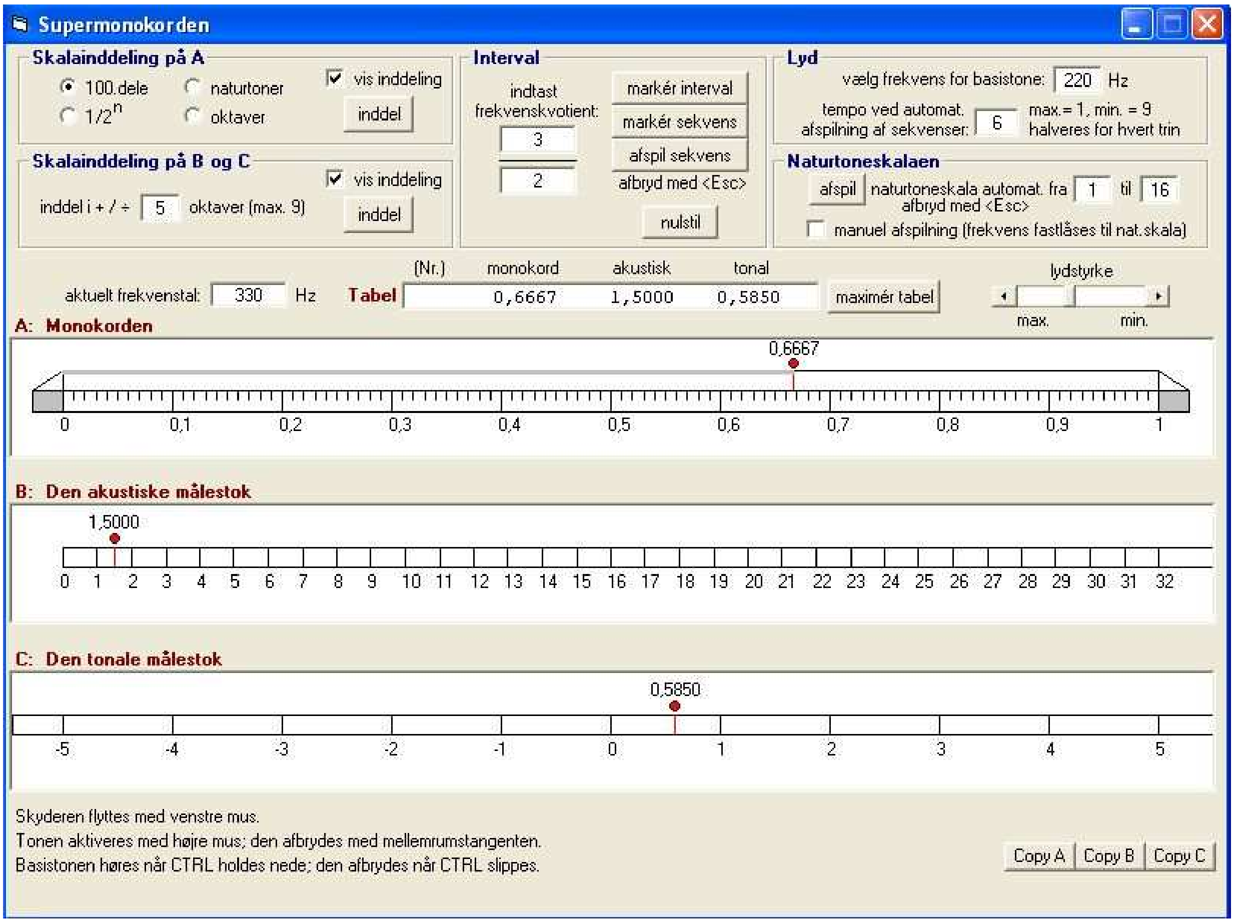


Figur 1

Nederst ser vi resonanskassen, som er delvis dækket af en målestok. Oven over resonanskassen ses strengen, som er udspændt over de to lodrette ”stole” ved 0 og 1; strengens fastgørelse til resonanskassen er antydet ved de to skrå streger. Den lodrette streg ved positionen 0,6667 er skyderen, og når strengen til venstre for skyderen er tegnet med en bredere grå streg, skal det illudere, at det er denne del af strengen, som er sat i svingninger (den bliver udflydende!).

Målestokken kan inddeles på flere forskellige måder, men her har jeg valgt at definere den udelte streng som enheden. De med tal forsynede delestreger markerer således 10.dele, og de mindre delestreger markerer 100.dele. På det tal, der løbende følger skyderen, kan vi aflæse 10000.dele. Når skyderen flyttes manuelt skal dette dog tages med et forbehold, fordi det er skærmens opløsning, der bestemmer, i hvor små trin skyderen kan flyttes.

På det næste billede ser vi programmet, sådan som det tager sig ud på skærmen. Foruden monokorden er der to andre målestokke: *den akustiske målestok* og *den tonale målestok*. Alle tre målestokke korresponderer med hinanden, så når vi flytter skyderen på den ene målestok, flytter de andre skydere sig med.



Figur 2

Hvad de to andre målestokke står for, forklarer jeg i forbindelse med de første øvelser. Nu vil jeg først beskrive, hvordan vi flytter skyderen og aktiverer tonen; beskrivelsen gælder alle tre målestokke (et kort resume kan læses nederst på skærmen).

Skyderen flyttes med *venstre* museknap. Den flytter sig automatisk hen til den position, man klikker på; derefter kan man flytte skyderen ved at ved at "fange" den med musen og bevæge til højre eller venstre. Den aktuelle position kan som sagt løbende aflæses umiddelbart over skyderen.

Når man klikker med *højre* museknap, hører man den aktuelle tone. Her har jeg valgt en overtonefrie tone, en *sinustone*, fordi den gengiver de akustiske fænomener, det her handler om, i deres reneste form. Tonen afbrydes, når man trykker på mellemrumstangenten. Såfremt den først "anslåede" tone ikke afbrydes med mellemrumstangenten, vil den vedblive at klinge med samme frekvens, når skyderen flyttes; først når musens højre knap igen aktiveres, skifter frekvensen til den aktuelle position. Ved til stadighed at have venstre hånds fingre parat over mellemrumstangenten kan man på denne måde med lidt øvelse bruge monokorden som et primitivt strengeinstrument – og i princippet fungerer den da også på samme måde som f.eks. en violin eller en guitar.

Vær opmærksom på at man ikke kan afbryde tonen med mellemrumstangenten, hvis man i mellemtiden har forladt billedfeltet – hvis man f.eks. har ændret skalainddelingen, mens tonen klinger videre. Man siger i programmeringsjargon, at fokus er blevet flyttet. I så fald skal man blot klikke en ekstra gang med højre mus i billedfeltet; dette er nu igen i fokus, og mellemrumstangenten fungerer igen som afbryderknap. En undtagelse er volumenkontrollen, som kan justeres mens tonen klinger, og uden at billedfeltet taber fokus.

Når programmet åbnes, står skyderen ved 1 på monokorden; dvs. strengen svinger i sin fulde længe, når vi ”anslår” tonen. Prøv nu at klikke et vilkårligt sted i billedfeltet med højre mus. Dermed ”anslås” tonen, og vi hører basistonen, som i dette tilfælde har frekvensen 220 Hz, svarende til det A, der ligger ”til venstre for nøglehullet på klaveret”. 220 Hz. er basistonens defaultværdi, men den kan ændres i indtastningsboksen øverst til højre på skærmen.

Prøv nu videre at flytte skyderen frem og tilbage og lyt til tonen, der fremkommer, når man klikker med højre mus. Hvis man ikke selv spiller på f.eks. en guitar eller en violin, får man her et godt indtryk af, hvordan tonen findes – og efter nogle forsøg vil man sikkert også kunne spille ”rigtige” melodier på monokorden. Bruger man den før nævnte teknik, hvor venstre hånds fingre holdes parat over mellemrumstangenten, vil man endda kunne frasere, idet man enten lader tonerne følge umiddelbart efter hinanden (legato) eller adskiller dem ved en lille pause (non legato), ligesom man også kan spille staccato.

Det spørgsmål, Pythagoras stillede, var imidlertid, om der er en sammenhængen mellem tonens højde og strengens længde, og vel at mærke en sammenhæng som kan udtrykkes matematisk. Han fandt ud af, at når strengen halveres, hører vi den tone, som ligger en *oktav* over basistonen, når strengen afkortes til 2/3, hører vi tonen en *kvint* over, og når strengen afkortes til 3/4, hører vi tonen en *kvart* over. Det er disse tre intervaller, som er selve grundlaget for de musikalske skalaer, og det er nu en nærliggende tanke, at også de intervaller, der fremkommer ved delingsforholdene 4/5 og 5/6, må være musikalsk relevante. Men Pythagoras fandt hurtigt ud af, at det ikke var tilfældet. Det var nemlig ikke muligt af få disse sidste talforhold passet ind i den diatoniske skala – sådan som jeg har beskrevet det i andre artikler.

Prøv nu selv at stille monokordens skyder ved de nævnte tal (som man altså bliver nødt til at omregne til decimalbrøker), og lyt til de respektive toner. På den klassiske monokord kan man kun høre én tone ad gangen; man kan altså ikke høre, hvordan et interval lyder som en *samklang*. Men det kan vi på SUPERMONOKORDEN. Efter at vi har aktiveret den aktuelle tone ved at klikke i billedfeltet med højre mus, kan vi nemlig tilføje basistonen ved at holde CTRL nede. Basistonen afbrydes igen, når CTRL slippes. Den anden tone afbrydes på sædvanlig vis med et klik på mellemrumstangenten. Vær opmærksom på at hvis man forlader billedfeltet, mens CTRL stadig holdes nede, kan basistonen først afbrydes, når man igen har klikket i billedfeltet (når dette har genvundet fokus).

Det kan undertiden være lidt besværligt at få skyderen placeret det rigtige sted, og i nogle tilfælde er det slet og ret umuligt, fordi det som før nævnt er skærmens opløsning, der bestemmer, i hvor små trin skyderen kan flyttes. Men stedet for at flytte skyderen manuelt kan man så indtaste intervallet dér, hvor der står <indtast frekvenskvotient>. Hvad der forstås ved en frekvenskvotient, forklarer jeg lidt længere fremme; her skal vi bare vide, at i frekvenskvotienten er tæller og nævner byttet om i forhold til de brøker, vi foreløbig har arbejdet med; eksempelvis skal vi altså skrive 2/1, hvor vi før skrev 1/2, og vi skal skrive 3/2, hvor vi før skrev 2/3. Når man derefter klikker på knappen <markér interval>, flytter skyderen sig automatisk hen til den rigtige position (skyderens reelle position er naturligvis stadig afhængig af skærmens opløsning, men tallene vises med de rigtige værdier).

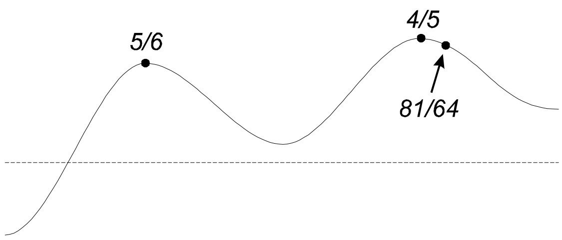
Prøv nu at indtaste nogle af de intervaller, vi allerede har hørt som toner (hvor basistonen altså ikke var med) som frekvenskvotienter, og lyt til deres klanglige kvalitet ved at bruge den netop beskrevne metode: Den højeste af tonerne aktiveres ved at klikke med højre mus i billedfeltet, hvorefter den dybeste tone (basistonen) tilføjes ved at holde CTRL nede. Man kan også systematisk gå denne række igennem:

2/1, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5, 7/6, 8/7, 9/8, 10/9 . . .

Rækken definerer en følge af intervaller, hvor de to tonerne gradvist nærmer sig hinanden, og hvor virkningen bliver mere og mere dissonerende, jo længere man kommer frem. På et tidspunkt kan virkningen dog ikke længere karakteriseres som egentlig dissonerende, snarere som pulserende. Det er det akustisk fænomen *svævning*, som opstår, når to toner ligger meget tæt på hinanden. Jo tættere de to toner ligger, desto langsommere er den pulserende effekt, og den ophører helt, når de to toner smelter sammen til én (det er som tidligere nævnt denne effekt klaverstemmeren lytter efter, når to strenge skal stemmes i samme frekvens). Svævningsfænomenet kan man eksempelvis høre, hvis man indtaster frekvenskvotienten 41/40. Forsøger man med toner, der ligger endnu tættere sammen, vil man muligvis ikke høre effekten; det er et teknisk problem, som har at gøre med den måde tonen genereres på. Problemet kan overvindes, hvis man vælger en højere basistonen. Sætter man denne til 400 Hz, vil man f.eks. tydeligt kunne høre mikrointervallet 81/80 som et svævningsfænomen. Dette interval er kendt som *det syntoniske komma*[1]; det fremkommer som differensen mellem den pytagoræiske terts, 81/64, og naturtertsen, 5/4.[2]

Prøv i denne forbindelse også at lytte til pytagoræiske terts, 81/64, og sammenlign den med naturtertsen, 5/4. Læg mærke til, at 5/4 også kan skrives som 80/64; forskellen mellem de to tertser er altså ganske lille, nemlig det netop nævnte syntoniske komma, 81/80.

Oprindeligt var det kun oktaven, kvinten og kvarten, der blev regnet som konsonerende, men i dag regner man også den store og den lille terts samt disses omvendinger, den lille og den store sekst, som konsonerende. Allerede det peger i retning af, at der er tale om en mere eller mindre subjektiv vurdering. Den klassiske definition af konsonansen som et interval, der er defineret ved et simpelt talforhold, holder ikke stik. I så fald skulle eksempelvis den pytagoræiske terts, 81/64, som vi lige har lyttet til, være ekstremt dissonerende, hvad den jo notorisk ikke er. Det vil være mere rigtigt at sige, at de simple talforhold definerer de maksimale konsonanser, og at den konsonerende virkning langsomt aftager, efterhånden som vi fjerner os fra et af disse maksima – for så igen at tiltage, når vi nærmer os det næste maksima. Kun i yderpunkterne (sekunder og septimer) bliver virkningen decideret dissonerende. Her har jeg forsøgt at illustrere hvordan virkningen forløber mellem den lille og den store naturterts:



Figur 3

Kurven må ikke tolkes som en eksakt fremstilling af forløbet, og man kan næppe heller opstille kriterier for en objektiv vurdering. Den vandrette stiplede linie skal angive, hvor skiftet fra konsonans til dissonans sker – men altså beroende på en subjektiv vurdering. Når den store terts er placeret højere, betyder det, at jeg vurderer denne som lidt mere konsonerende end den lille terts, og når

[1] Intervallet kaldes også det didymiske komma efter den græske musikteoretiker Didymus, der levede i det første århundrede før vor tidsregning.

[2] En mere detaljeret og også mere nøjagtig demonstration af svævningsfænomenet, kan man finde i programmet INTERVALLET; bl.a. kan man her følge lydkurvens udvikling.

kurven falder hurtigere i venstre side end i højre, betyder det, at den nærmeste simple brøk mod venstre er 9/8, som definerer den decideret dissonerende store sekund, mens vi mod højre har en ny konsonans, nemlig kvarten, 4/3. Jeg har også markeret, hvor den pytagoræiske terts skal findes.

For at finde de simpleste af de princippet uendeligt mange rationelle brøker, der ligger mellem 6/5 og 5/4, kan vi bruge Farey-algoritmen, som jeg har beskrevet i en anden artikel, og som man kan beregne i et program, jeg ligeledes har skrevet. Vælger vi eksempelvis 23 som højeste tal, får vi beregnet disse brøker:

6/5, 21/17, 17/14, 11/9, 16/13, 23/19, 5/4

I en musikalsk fortolkning repræsenterer disse brøker altså en række intervaller med forholdsvis simple frekvenskvotienter, som ligger imellem den lille og den store naturterts. Prøv engang at indsætte brøkerne dér, hvor der står <indtast frekvenskvotient> og lyt til intervallerne. Det er min erfaring, at de fleste mennesker har svært ved at afgøre, hvilket af dem, der er det mest velklingende. Når jeg selv vil betegne det kvalitative indtryk af alle syv intervaller som ”tertsagtig”, er det naturligvis fordi jeg associerer til de intervaller, jeg kender fra musikken, men jeg udtrykker samtidig, at jeg oplever en glidende overgang.[3]

Dermed siger jeg ikke, at det ene interval musikalsk set kan være lige så godt som det andet. Faktisk kan ingen af dem bruges musikalsk! Jeg siger blot, at der ikke er den store forskel på, hvordan vi kvalitativt vurderer hvert af disse intervaller, *når vi hører det som et isoleret akustisk fænomen*. Det er noget ganske andet, når et interval indgår i en musikalsk sammenhæng. Så er det ikke længere intervallet som akustisk fænomen, opmærksomheden er rettet mod, men derimod intervallet som *tonalt* fænomen. Her vurderer vi intervallet efter den funktion, det har i det tonale system – og vi vil hurtigt finde ud af, at naturtertsen ikke hører hjemme i dette system!

I forlængelse heraf vil jeg foreslå endnu et forsøg med monokorden: Begynd med at sætte skyderen ved 1 (det sikreste er at klikke på knappen <nulstil>). Nu aktiveres både den aktuelle tone og basistonen – altså både højreklik i billedfeltet og CTRL[4]. Flyt så langsomt skyderen mod venstre, idet *begge* knapper på musen holdes nedtrykket. Vi gennemløber nu hele skalaen i et glissando, samtidig med at vi hører basistonen. I begyndelsen høre vi det før omtalte svævningsfænomen – derefter er det op til læseren selv at afgøre, hvornår vi hører en konsonans, og hvornår vi hører en dissonans!

*   *   *

Vi skal nu se, hvordan diverse toner og intervaller bliver markeret på de to andre målestokke. Når vi indtaster intervallerne som frekvenskvotienter, sådan som vi har gjort i de sidste forsøg, er det egentlig den akustiske målestok, der refereres til. Her udtrykkes en tones højde som et frekvenstal, og frekvenstallet er omvendt proportionalt med strengens længde; eksempelvis er frekvenstallet 3/2, når strengens længde er 2/3. I programmet SUPERMONOKORDEN er frekvenstallet dog ikke defineret sådan, som man normalt gør det i akustikken, nemlig som antallet af svingninger per sekund – den enhed der kaldes Hertz, forkortet Hz. I stedet er frekvenstallet defineret i forhold til monokorden, dvs. den tone, der svarer til monokordens løse streng, sættes lig med 1. Tallene på den akustiske målestok skal derfor forstås som *relative* frekvenstal; de kan omregnes til almindelige akustiske frekvenstal ved at vi ganger dem med basistonens frekvens. Når basistonen f.eks. er sat til 220 Hz, vil kvinten – den tone, vi på monokorden finder ved 2/3 (0,6667) og på den akustiske målestok ved

[3] Som et andet eksempel kan nævnes, at der mellem 5/4 og 81/64, altså det syntoniske komma, findes 18 andre rationelle brøker, når vi sætter den øvre grænse til 81.

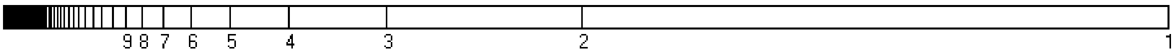
[4] Her vil man kunne opleve, at tonen bliver svagere eller måske endda helt forsvinder, når man tilføjer basistonen. Idet den samme tone jo nu høres fra to forskellige lydgivere, kan det nemlig ske, at disse kommer i modfase; man skal i så fald blot slippe CTRL et kort øjeblik og prøve igen.

3/2 (1,5) – lyde med frekvensen 220 · 3/2 = 330 Hz. Dette tal kan i øvrigt aflæses i tekstboksen over monokorden til venstre (se også eksemplet i fig. 2).

Den naturlige skalainddeling på den akustiske målestok er *naturtoneskalaen*, således kaldet fordi det er den eneste skala, der forekommer som naturligt akustisk fænomen[5]. Den kan kort beskrives som den akustiske realisation af den naturlige talrække. Hvis vi vil afspille naturtoneskalaen på monokorden, skal vi altså vælge den reciprokke talrække:

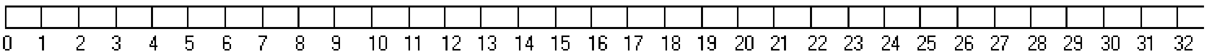
1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10 . . .

Det kan vi imidlertid komme nemmere om ved. I rubrikken øverst til venstre kan vi vælge at inddele monokordens skala efter naturtonerne: Klik på knappen <naturtoner> og derefter på knappen <inddel>. Monokorden vil nu se sådan ud:



Figur 4

Tallene er en nummerering af naturtonerne, men de kan også tolkes som den reelle position på monokorden, når de læses som nævneren i diverse stambrøker. Til sammenligning ses den akustiske målestok her:



Figur 5

Den akustiske målestok er åben mod højre, og når vi fører monokordens skyder langt nok mod venstre, vil skyderen på den akustiske målestok forsvinde ud af skærmen til højre. Omvendt vil monokordens skyder forsvinde ud af skærmen til højre, hvis skyderen på den akustiske målestok kommer ind i området mellem 0 og 1.

Man kan sige, at hele talrækken mellem 1 og ∞ spejler sig i intervallet mellem 0 og 1 i form af de reciprokke tal, og sådan som monokordens skala her er inddelt, kan den betragtes som en forstørret udgave af intervallet mellem 0 og 1 på den akustiske målestok.

Kalder vi det tal der aflæses på monokorden M, og det tal der aflæses på den akustiske målestok N (står for *n*aturtoneskalaen), er de to målestokke altså forbundet ved omregningsformlerne:

$$N = 1 / M \qquad \text{og} \qquad M = 1 / N$$

SUPERMONOKORDEN er også udstyret med en facilitet til automatisk afspilning af naturtoneskalaen: I rubrikken <Naturtoneskalaen> øverst til højre på skærmen vælger man det afsnit af skalaen, man vil hører, hvorefter man klikker på knappen <afspil>. Under afspilningen flytter alle tre skydere sig automatisk frem til den aktuelle tone. Tempoet vælges i rubrikken <Lyd>, umiddelbart oven over. Prøv nu at lytte til naturtoneskalaen, idet defaultindstillingen bevares (dvs. man hører de første 16 af skalaens toner i et rimeligt hurtigt tempo).

Tonehøjden kan hurtigt nå den grænse, hvor det ikke længere er muligt at skelne tonerne klart fra hinanden, eller hvor tonen ligefrem bliver ubehagelig at høre på. Hvis vi specielt vil studere den højere del af naturtoneskalaen, må vi derfor vælge en dybere basistone; til gengæld kan vi måske så ikke længere høre de dybeste toner. Prøv f.eks. at sætte basistonen til 20 Hz. Man skal have en vir-

[5] Det er f.eks. denne tonerække, som naturligt frembringes på blæseinstrumenter som trompet, horn, basun m.fl. En større eller mindre del af naturtonerne vil også ledsage enhver tone, som frembringes ved at en streng eller et andet elastisk legeme sættes i svingninger. I dette tilfælde bruger man gerne betegnelsen *overtonerækken*; det er overtonerækkens sammensætning, der bestemmer en tones klanglige valeur.

kelig god højttaler eller hovedtelefon, for at kunne høre begyndelsen af naturtoneskalaen, men til gengæld kan vi nu uden problemer høre op til naturtone nr.32 eller højere.

Som defaultindstilling vises de første 32 naturtoner på den akustiske målestok, men i rubrikken <Skalainddeling på B og C> kan den både stilles højere og lavere. Når der som defaultværdi står 5, betyder det, at skalaen omfatter 5 oktaver, hvad der netop dækker de 32 første naturtoner. Prøv at forhøje tallet til 6. Nu går skalaen op til 64. Vælg så at få afspillet naturtoneskalaen fra 50 til 60, og sænk forinden basistonen til 10 Hz. Når afspilningen startes, kan man godt fornemme, at frekvensen stiger fra tone til tone (se tekstboksen <aktuelt frekvenstal>); men det er tydeligvis ikke intervaller, som er musikalsk relevante.

Sådan som vi hører naturtoneskalaen, bliver intervallet mellem tonerne to og to altså mindre og mindre, jo højere vi kommer op. Men sådan som naturtoneskalaen fremstilles på den akustiske målestok, er afstanden den samme overalt; skalaen er lineær, som matematikeren vil udtrykke det. Åbenbart bruger vi en anden målestok, når vi oplever skalaen i form af et umiddelbart sanseindtryk – og det kan kun betyde, at det center i hjernen, den auditive cortex, der bearbejder lyd og specielt tonefølger, på én eller anden måde omregner et eksponentielt forløb til et lineært! Derom handler det næste afsnit.

* * *

Det målesystem, som vi refererer til, når vi *hører* et toneforløb, er *det tonale*. Den nederste af de tre målestokke på SUPERMONOKORDEN, er *den tonale målestok*. Inddelingen markerer oktaverne, og som man kan se, er inddelingen ækvidistant, dvs. der lige stor afstand mellem alle delelinjer. Det er på samme måde oktaverne ligger på klaviaturet, og klaviaturet kan faktisk opfattes som en fysisk manifestation af den tonale målestok.

Når skalainddelingen på den akustiske målestok er lineær, er den på den tonale målestok logaritmisk, mens det omvendt gælder, at hvis vi lader skalainddelingen på den tonale målestok være lineær, så vil den akustiske målestok blive eksponentiel (logaritmefunktionen og eksponentialfunktionen er hinandens modsætninger, på samme måde som addition er det modsatte af subtraktion, og multiplikation er det modsatte af division).

Dette omvendte forhold mellem de to målestokke kan demonstreres ved at vi igen følger naturtoneskalaen, som jo er identisk med skalainddelingen på den akustiske målestok. Opgaven går så ud på at aflæse skyderens stilling på den tonale målestok, og stille de sammenhørende værdier op i en tabel. Vi kan naturligvis gøre det ved trin for trin at flytte skyderen manuelt, men tabellen genereres faktisk automatisk, idet vi afspiller skalaen. Her ser vi tabellen for de 32 første naturtoner:

(Nr.)	monokord	frekventisk	tonal
01	1,0000	1,0000	0,0000
02	0,5000	2,0000	1,0000
03	0,3333	3,0000	1,5850
04	0,2500	4,0000	2,0000
05	0,2000	5,0000	2,3219
06	0,1667	6,0000	2,5850
07	0,1429	7,0000	2,8074
08	0,1250	8,0000	3,0000
09	0,1111	9,0000	3,1699
10	0,1000	10,0000	3,3219
11	0,0909	11,0000	3,4594
12	0,0833	12,0000	3,5850
13	0,0769	13,0000	3,7004
14	0,0714	14,0000	3,8074
15	0,0667	15,0000	3,9069
16	0,0625	16,0000	4,0000

(Nr.)	monokord	frekventisk	tonal
17	0,0588	17,0000	4,0875
18	0,0556	18,0000	4,1699
19	0,0526	19,0000	4,2479
20	0,0500	20,0000	4,3219
21	0,0476	21,0000	4,3923
22	0,0455	22,0000	4,4594
23	0,0435	23,0000	4,5236
24	0,0417	24,0000	4,5850
25	0,0400	25,0000	4,6439
26	0,0385	26,0000	4,7004
27	0,0370	27,0000	4,7549
28	0,0357	28,0000	4,8074
29	0,0345	29,0000	4,8580
30	0,0333	30,0000	4,9069
31	0,0323	31,0000	4,9542
32	0,0313	32,0000	5,0000

Figur 6

Normalt er tabellen minimeret, så man kun ser en enkelt række, men når man klikker nu på knappen <maximér tabel> åbnes tabellen, sådan som det er vist i fig.6. Her kan vi umiddelbart sammenligne de tre mål med hinanden: monokorden, den akustiske målestok og den tonale målestok.

Det er kun de to sidste mål, der har interesse i denne forbindelse, og det første vi skal lægge mærke til er, at de hele tal på den tonale målestok: 0, 1, 2, 3, 4 og 5, svarer til tallene 1, 2, 4, 8, 16 og 3 på den akustiske målestok. Sammenhængen mellem disse to talrækker bliver tydeligere, når vi udtrykker frekvenstallene som en potens af 2:

n	0	1	2	3	4	5
2^n	1	2	4	8	16	32

Går vi fra den nederste til den øverste række kan sammenhængen formuleres sådan: Den tonale værdi er lig med den eksponent, vi skal give 2 for at få frekvenstallet. Måske husker man fra sin skoletid, at dette er definitionen på en logaritme! Generelt lyder definitionen: Logaritmen til et tal er den eksponent, man skal give grundtallet for at få tallet. Normalt regner vi med 10-talslogaritmer, dvs. grundtallet er 10; men her grundtallet 2, dvs. det handler om 2-talslogaritmer (også kaldet binære logaritmer). *De tal vi aflæser på den tonale målestok, er med andre ord 2-talslogaritmerne til frekvenstallene*. I ovenstående lille tabel, hvor n og 2^n er sammenstillet, kan vi let aflede den øverste række af den nederste (altså at finde logaritmerne); men der findes ikke nogen let metode, hvorved vi kan udregne logaritmerne til de mellemliggende hele tal – for ikke at tale om de derimellem liggende brøker. Her var man tidligere henvist til en logaritmetabel, men i dag vil man naturligvis bruge en lommeregner.[6]

På det punkt fungerer SUPERMONOKORDEN også som en slags regnemaskine: Stil skyderen på den akustiske målestok på det tal, man ønsker at finde logaritmen til, og aflæs denne ud for skyderen på den tonale målestok. I tabellen fig.6 har vi faktisk også fået genereret en logaritme*tabel*, dog kun for de hele tal.

Ligesom vi før formulerede omregningsformlerne fra monokordtal til frekvenstal og omvendt, vil vi nu formulere omregningsformlerne fra frekvenstal til tonale tal og omvendt. Frekvenstallene symboliserer vi som før ved bogstavet N (*N*aturtoneskalaen); den tonale værdi vil vi symbolisere ved det græske bogstav θ (det græske theta, som jeg her bruger som en forkortelse for *t*one):

$$\theta = \log_2 N \qquad \text{og} \qquad N = 2^\theta$$

* * *

Hvis man vil forstå tonesystemets og skaladannelsens matematik, er det nødvendigt at have i det mindste et elementært kendskab til logaritmer – for som det gerne skulle være fremgået af det foregående, så er det ikke frekvenstallene vi skal bruge, når vi f.eks. vil påvise et matematisk princip bag skaladannelsen, men det er frekvenstallenes *logaritmer*. Derfor vil jeg nu sige lidt mere om dette matematiske begreb.

Den heltallige del af logaritmen kaldes *karakteristikken* (af græsk 'karakteristikon', der betyder særpræg), mens decimaldelen kaldes *mantissen* (af latin 'mantissa', der betyder tilføjelse). Logaritmerne udgør et periodisk system, hvor mantisserne gentages fra periode til periode, mens karakteristikken løbende hæves med 1. Når frekvenstallet er 1, 2, 4, 8, 16 osv., nemlig ved periodens begyndelse, er mantissen 0; men mantissen er også den samme, når vi vælger et andet frekvenstallet og

[6] For at finde 2-talslogaritmen til et tal skal man først at finde den almindelige 10-talslogaritme, hvorefter denne divideres med logaritmen til 2. Fremgangsmåden på lommeregneren er denne: 1) indtast tallet, 2) tryk $\boxed{\text{LOG}}$, 3) tryk $\boxed{\div}$, 4) indtast 2, 5) tryk $\boxed{\text{LOG}}$, 6) tryk $\boxed{=}$.

løbende fordobler dette. I fig. 6 kan vi f.eks. se, at logaritmerne til 3, 6, 12 og 24 alle har mantissen -,5850, mens karakteristikken følger talrækken. Prøv også at finde andre eksempler!

Det skulle nu ikke være svært at indse, at eftersom tallene på den tonale målestok repræsenterer toner, og eftersom tonesystemet er periodisk opbygget, idet perioden her kaldes ’en oktav’, så er mantissen et udtryk for tonens placering inden for perioden. Hvis vi identificerer målestokkens nulpunkt med tonen C, så véd vi , at vi har at gøre med et C, hvis mantissen er 0. Men vi véd også, at hvis mantissen er -,5850, så har at gøre med et G. Hvordan nu det? Jo, G’et ligger en kvint over C’et, og kvinten er, som vi tidligere har fundet ud af, defineret ved frekvenskvotienten 3/2; vi har lige set, at 2-talslogaritmen til 3 er 1,5850, altså skal 2-talslogaritmen til 3/2 findes på samme position (samme mantisse) i den foregående periode: 1,5850 – 1 = 0,5850. Dette er G’et i 1. oktav; i de følgende oktaver skal karakteristikken blot løbende hæves med 1. Karakteristikken er således et udtryk for, hvilken oktav det aktuelle G er beliggende i.

Prøv nu selv på den tonale målestok at flytte skyderen fra 0,5850 til 1,5850 og videre til 2,5850, 3,5850 og 4,5850, og lyt hvert sted til tonen (hvis det ikke er muligt at ramme tallet præcist, vælges det, der kommer tættest på).

Men hvor finder vi de tilsvarende toner (her G’er) på den negative del af skalaen? Flytter vi skyderen frem til –0,5850, vil vi ikke høre et G, men et F, altså den tone, som ligger en kvint *under* C. Problemet er, at G’et nu ikke skal findes som kvinten over C’et, men som kvarten *under*. Kvarten er kvintens omvending, dvs. dens størrelse findes som differensen mellem oktaven og kvinten, altså som 1 – 0,5850 = 0,4150. Flytter vi skyderen hen til dette tal, vil vi høre et F, men flytter vi skyderen hen til –0,4150, vil vi høre et G, og det samme vil vi ved –2,4150, –3,4150 og –4,4150 (igen kan det ske, at det ikke er muligt at ramme tallet præcist).

SUPERMONOKORDEN anskueliggør grafisk, hvordan logaritmen til et tal mindre end 1 bliver negativ. Se også her den negative pendant til tabellen over heltallige eksponenter:

n	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
2^n	1/64	1/32	1/16	1/8	1/4	1/2	1

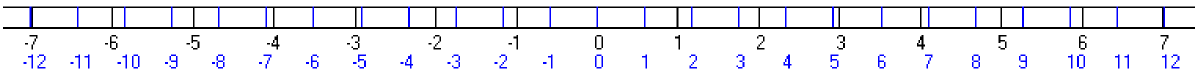
* * *

Mange andre ting vedrørende såvel musik som matematik lader sig demonstrere og studere ved hjælp af SUPERMONOKORDEN; her vil jeg nu først demonstrere, hvordan det pytagoræiske komma fremkommer, og derefter vil jeg vise, hvordan vi finder den frekvenskvotient, der svarer til kvinten i det tempererede tonesystem.

Vi kender efterhånden teknikken med at flytte skyderen hen til den korrekte position ved at indtaste en frekvenskvotient og klikke på knappen <markér interval>. Men klikker vi i stedet på knappen nedenunder, hvor der står <markér sekvens>, får vi genereret *en sekvens* af det interval vi har indtastet, eksempelvis en sekvens af kvinter – og klikker vi på knappen nedenunder igen, hvor der står <afspil sekvens>, afspilles sekvensen automatisk. Ligesom da vi afspillede naturtoneskalaen kan tempoet vælges under rubrikken <Lyd>. Samtidig med sekvensen genereres en tabel (altså også selv om sekvensen ikke afspilles).

Jeg kalder det en sekvens, men egentlig er det en skala, for det handler jo om at inddele den tonale målestok på grundlag af en anden enhed end oktaven. På den tonale målestok er oktaven fortsat den *primære* enhed, men nu kan altså vælge en *sekundær* enhed og få den markeret på målestokken.

Som bekendt defineres det pytagoræiske komma som forskellen mellem 12 kvinter og 7 oktaver. Vi skal derfor som det første sørge for, at der vises 7 oktaver på den tonale målestok – og det gør vi ved i rubrikken <Skalainddeling på B og C> at indtaste et 7-tal og klikke på <inddel>. Derefter indtaster vi frekvenskvotienten 3/2 (kvinten) og klikker på knappen <markér sekvens>. Den tonale målestok vil nu se sådan ud (sml. med fig.3.2, hvor det dog kun er den positive del af skalaen, der er vist):



Figur 7

For nemmere at kunne skelne kvinterne fra oktaverne, er de førstnævnte markeret med blåt. Som det fremgår af fig.7, genererer programmet 7 oktaver og 12 kvinter på både den positive og den negative del af den tonale målestok, men vi vil udelukkende fokusere på den positive halvdel.

Det vi i denne forbindelse skal lægge mærke til er, at delestregerne ved hhv. 12 og 7 næsten falder sammen. Vi kan heller ikke regne med at få vist den korrekte tonale værdi, hvis vi bare flytter skyderen hen til 12-tallet, og aflæser tallet over skyderen (på min skærm er det 7,0194 – svarende til 129,6000 på den akustiske målestok). Men her kommer tabellen os til hjælp: her finder vi i den allersidste linie, at de korrekte værdier er 7,0196 og 129,7463.

For at finde det tonale (lineære) mål for det pytagoræiske komma, skal vi trække 7 oktaver fra ovennævnte tal: 7,0196 – 7 = 0,0196. Det tilsvarende akustiske mål finder vi som $2^{0,0196}$ = 1,0136784. Dette tal kan vi så omregne til en almindelig brøk sådan: 10136784/10000000, og denne brøk kan vi dernæst indtaste som frekvenskvotient, hvorefter vi kan *høre* det pytagoræiske komma. Her gentager jeg lige fremgangsmåden: Når brøken er indtastet klikkes på <markér interval>. Når vi så klikker med *højre* mus i et af billedfelterne (ligegyldigt hvilket, men endelig med *højre* mus, for klikker vi med venstre flytter skyderen sig), hører vi den tone, som ligger et pytagoræisk komma over basistonen. Dernæst aktiverer vi basistonen med CTRL – og nu hører vi begge toner, altså det *interval*, som kaldes det pytagoræiske komma. Vi vil høre det i form af *svævning*.

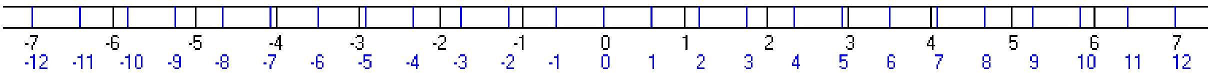
På denne måde har vi dog kun fundet størrelsen af det pytagoræiske komma med en rimelig god tilnærmelse. For at finde den helt eksakte størrelse skal vi gå frem på denne måde: Udtrykt i akustisk mål er 12 kvinter lig med $(3 / 2)^{12}$ = 531441 / 4096; derfra skal vi så trække 7 oktaver, hvilket igen sker ved division med 2^7 = 128, altså 531441 / 4096 · 1 / 128 = 531441 / 524288. Dette er den eksakte akustiske definition på det pytagoræiske komma. Den tilsvarende tonale størrelse finder vi som 2-tals logaritmen til denne brøk; den er med 5 rigtige decimaler 0,01955.

Hvis vi nu indtaster ovennævnte eksakte brøk som frekvenskvotient, vil de tal, vi kan aflæse over skyderne, dog være nøjagtig de samme som før – afvigelsen ligger nemlig et godt stykke uden for de fire decimaler, vi kan aflæse.

* * *

Den næste opgave gik ud på at finde den frekvenskvotient, der svarer til kvinten i *det tempererede tonesystem*. Det fremkommer som bekendt ved at vi udligner forskellen mellem 12 kvinter og 7 oktaver (altså det pytagoræiske komma) ligeligt mellem alle 12 kvinter. Alle kvinter bliver altså en anelse for små, og de kaldes nu tempererede. Det tonale mål for den tempererede kvint er således per definition 7/12 eller ca. 0,5833. Vi skal nu blot indsætte dette tal som eksponent i omregningsformlen $N = 2^{\theta}$, altså $N = 2^{0,5833}$. Men da det jo tydeligvis drejer sig om en periodisk decimalbrøk, kan vi lige så godt forøge nøjagtigheden ved at tilføje nogle flere 3-taller, og vi får da som resultat 1,498307.

Vi omregner nu dette tal til en almindelig brøk: 1498307 / 1000000, indtaster den som frekvenskvotient og genererer samme sekvens som før:



Figur 8

Denne gang falder delestregerne ved hhv. 12 og 7 helt sammen – vi har fået genereret det tempererede tonesystem, hvor 12 kvinter er lig med 7 oktaver!

Jeg vender tilbage til tabellen, for af den kan vi nemlig dels direkte aflæse, dels aflede det akustiske og det tonale mål for samtlige toner alias intervaller i den kromatiske skala; her vil vi dog kun se på de tonale mål. Jeg gengiver her tabellen for både den tempererede og den pytagoræiske kvint:

tempereret

(Nr.)	monokord	frekventisk	tonal
-9	38,0546	0,0263	-5,2500
-8	25,3984	0,0394	-4,6667
-7	16,9514	0,0590	-4,0833
-6	11,3137	0,0884	-3,5000
-5	7,5510	0,1324	-2,9167
-4	5,0397	0,1984	-2,3333
-3	3,3636	0,2973	-1,7500
-2	2,2449	0,4454	-1,1667
-1	1,4983	0,6674	-0,5833
0	1,0000	1,0000	0,0000
1	0,6674	1,4983	0,5833
2	0,4454	2,2449	1,1667
3	0,2973	3,3636	1,7500
4	0,1984	5,0397	2,3333
5	0,1324	7,5510	2,9167
6	0,0884	11,3137	3,5000
7	0,0590	16,9514	4,0833
8	0,0394	25,3984	4,6667
9	0,0263	38,0546	5,2500
10	0,0175	57,0175	5,8333
11	0,0117	85,4298	6,4167
12	0,0078	128,0000	7,0000

pytagoræisk

(Nr.)	monokord	frekventisk	tonal
-9	38,4434	0,0260	-5,2647
-8	25,6289	0,0390	-4,6797
-7	17,0859	0,0585	-4,0947
-6	11,3906	0,0878	-3,5098
-5	7,5938	0,1317	-2,9248
-4	5,0625	0,1975	-2,3399
-3	3,3750	0,2963	-1,7549
-2	2,2500	0,4444	-1,1699
-1	1,5000	0,6667	-0,5850
0	1,0000	1,0000	0,0000
1	0,6667	1,5000	0,5850
2	0,4444	2,2500	1,1699
3	0,2963	3,3750	1,7549
4	0,1975	5,0625	2,3399
5	0,1317	7,5938	2,9248
6	0,0878	11,3906	3,5098
7	0,0585	17,0859	4,0947
8	0,0390	25,6289	4,6797
9	0,0260	38,4434	5,2647
10	0,0173	57,6650	5,8496
11	0,0116	86,4976	6,4346
12	0,0077	129,7463	7,0196

Figur 9

Vi begynder med tabellen til venstre, hvor det er den positive del af sidste kolonne, vi skal fokusere på. Vi husker, at tonens navn er et udtryk for dens plads inden for oktaven, men det samme er jo mantissen. Her har vi altså fået tonenavnene og de tonale værdier koblet sammen. I den følgende opstilling identificerer vi som sædvanlig nulpunktet med tonen C. Navnene er angivet dobbelt ligesom på kvintcirklen. Tallene i øverste række svarer til venstre kolonne i fig.9.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,0000	0,5833	0,1667	0,7500	0,3333	0,9167	0,5000	0,0833	0,6667	0,2500	0,8333	0,4167
C	G	D	A	E	H	Fis	Cis	Gis	Dis	Ais	Eis
Deses	Ases	Eses	Bes	Fes	Ces	Ges	Des	As	Es	B	F

Dermed har vi fået logaritmebegrebet koblet sammen med begreberne den udfoldede og den indfoldede orden (se artiklen *Det naturlige tonesystem og skaladannelsens matematiske princip*). I og med at det her handler om kvintskalaen, er tonerne i tabellen jo opstillet i den udfoldede orden; men hvis vi omgrupperer rækken, så tallene (dvs. mantisserne) ordnes efter stigende værdi, får vi den indfoldede orden. Med andre ord kan den udfoldede orden aflæses af logaritmerne, således som de er opstillet i tabellen fig.9, tonernes placering i kvintskalaen kan aflæses af karakteristikken, og deres placering inden for oktaven, altså den indfoldede orden, kan aflæses af mantissen.