Det naturlige tonesystem
og skaladannelsens matematiske princip
tillige med en introduktion til computerprogrammet SKALAGENERATOREN

af Jørgen Erichsen

Denne artikel er et stærkt forenklet sammendrag af udvalgte afsnit fra en endnu ikke udgivet afhandling om musikkens naturlige grundlag. Undersøgelsen omfatter både den tonale og den rytmiske dimension, men i artiklen omtales kun den førstnævnte. En indledende analyse af musikken som ”en leg med ordnede tidsstrukturer” (noget der kan minde om Hermann Hesses *Glasperlespillet*!) er heller ikke omtalt, og det samme gælder analysen af ”den psykologiske faktor”, hvor det bl.a. handler om den rolle perceptionsapparatet spiller i forbindelse med fortolkningen af tonale strukturer. Artiklen vil utvivlsomt efterlade læseren med adskillige ubesvarede spørgsmål, men netop derved håber jeg at kunne genoplive interessen for et emne, som musikvidenskaben stort set har negligeret, siden Helmholtz for halvandet hundrede år siden mente at kunne bevise, at der ikke består nogen forbindelse mellem musik og matematik udover den, der er vedrører akustikken – og på længere sigt håber jeg naturligvis også, at der dermed kan banes vej for en publikation af et arbejde, der har beskæftiget mig i mere end 25 år.

For at gøre et unægtelig vanskeligt emne lettere forståeligt, har jeg skrevet computerprogrammet SKALAGENERATOREN, hvor det matematiske princip bag tonesystemet og skaladannelsen bliver anskueliggjort grafisk, og hvor man kan realiseres frekvenstallene som toner og således få bekræftet, at teorien stemmer overens med den musikalske virkelighed. Programmet kan downloades fra www.josebamus.dk . Artiklens første kapitel er en vejledning i brugen af SKALAGENERATOREN.

Musica est exercitium aritmeticae occultum nescientes se numerare animi [1)]

Gottfried Wilhelm Leibniz

Indledning

Det er den almindelige opfattelse, at musikkens skalaer ikke er defineret ved et matematisk princip, men at det i stedet handler om at dele oktaven på en sådan måde, at antallet af dissonerende intervaller reduceres til et minimum, og der er derfor snarere tale om et æstetisk princip. Således hedder det også hos Hermann von Helmholtz, hvis bog *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik* fra 1862 stadig betragtes som „the scientific basis of music theory“[2]. Ifølge Helmholtz er musikkens skalaer ”nicht einer Naturnothwendigkeit zuzuschreiben, sondern sie sind Producte genialer Erfindung, wie wir vorher an den Principien der architektonischen Stilarten als Beispielen erläutert haben.” (s. 410). I et af disse eksempler hedder det umisforståeligt: ”Ebenso wenig, wie die gotischen Spitzbogen, müssen wir unsere Durtonleiter als Naturprodukt betrachten.” (s. 389). [3]

Den skalamodel, som Helmholtz opstiller, er dog temmelig problematisk. For at få regnestykket til at går op og i åbenlys strid med erfaringen tvinges han således til at lade den diatoniske skala være sammensat af tre forskellige skalatrin (defineret ved frekvenskvotienterne 9/8, 10/9 og 16/15), hvor det er enhver musikers erfaring, at der kun er to. Han er heller ikke i stand til at forklare, hvorfor vi har valgt skalaer med hhv. 5, 7 og 12 intervaller (altså hhv. den pentatone, den diatoniske og den kromatiske skala), men han henviser til, at det kan være en reminiscens fra antikkens metafysiske forestillinger. I øvrigt omtaler han den pentatone og den diatoniske skalas ikke-ækvidistante inddeling som ”diese merkwürdige Ungleichkeit”, og tanken om, at der skulle findes musikalsk anvendelige skalaer ud over den kromatiske, afviser han med bemærkningen: ”Die älteren Versuche mehr als 12 Tonstufen in die Scala einzuführen haben nichts Brauchbaren ergeben, weil sie von keinen richtigen Prinzip ausgingen.” (s. 519).

I denne artikel viser jeg, at Helmholtz tog fejl! Tonesystemet er ned til mindste detalje defineret ved et simpelt matematisk princip, og dermed får vi ikke blot forklaringen på, hvorfor vi har ”valgt” de tre nævnte skalaer (dvs. vi har ikke valgt dem, de er nemlig med Helmholtz egen betegnelse at betragte som ”naturprodukter”), men vi får derudover påvist eksistensen af en lang række andre musikalsk relevante skalaer, om end det vil være forbundet med tekniske vanskeligheder at realisere dem på et akustisk instrument[4].

At det ikke lykkedes Helmholtz og talrige andre både før og efter ham at påvise et matematisk princip bag skaladannelsen kan kort forklares ved, at deres undersøgelse er baseret på et forkert talgrundlag, nemlig frekvenstallene. Frekvenstallene og de deraf afledede frekvenskvotienter definerer hhv. tonerne og intervallerne som et fysisk fænomen. Men for at forstå skaladannelsen må vi behandle tonerne og intervallerne som et *bevidsthedsfænomen* og mere specifikt som et *tonalt fænomen*. Der sker nemlig under tonernes forvandling fra fysisk til tonalt fænomen også en matematisk transformation. Som fysisk fænomen bliver en tonefølge beskrevet som et *eksponentielt* forløb, men som bevidsthedsfænomen må den samme tonefølge beskrives som et *lineært* forløb. Eller sagt på en anden måde: Når vi måler frekvenstallene for en tonefølge, vil vi se, at de fordobles for hver

---

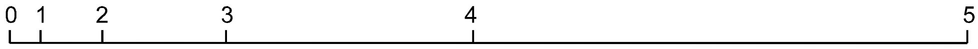
[1] ”Musik er en skjult udøvelse af regnekunsten, idet sjælen er ubevidst om at den regner”. Citatet stammer fra en korrespondance Leibniz havde med matematikeren Goldbach i 1712.

[2] Således omtaltes bogen i forbindelse med 1954-genoptrykket af den engelske oversættelse, *On the Sensations of Tone* – men den dag i dag er de fleste musikteoretikere fortsat af samme mening!

[3] Sidehenvisningerne refererer til ”fünfte Ausgabe”, 1896.

[4] Alle disse skalaer kan høres og deres musikalske relevans kan afprøves i computerprogrammet SKALAGENERATOREN.

oktav, vi bevæger os op gennem skalaen, og på en målestok (*den akustiske målestok*) vil eksempelvis oktaverne blive afmærket således:



Men når vi *hører* en tonefølge, opfatter vi afstanden mellem to oktaver som lige stor overalt på skalaen, og de vil derfor på *den tonale målestok* blive afmærket således:

Sådan er oktaverne også placeret på klaviaturet, der jo egentlig blot er den tonale målestok, hvor afmærkningerne har form af tangenter, man kan spille på!

Har man ikke glemt sin skolelærdom, er det let at se, at det på den tonale målestok handler om *logaritmerne til frekvenstallene* (nærmere bestemt de binære logaritmer). Det er *dem*, vi skal regne med og ikke frekvenstallene – sådan som bl.a. Helmholtz har gjort.[5]

Normalt kan vi ikke måle og sætte tal på et bevidsthedsfænomen (i hvert fald ikke på en måde, der blot tilnærmelsesvist kan sammenlignes med de eksakte størrelser, fysikeren opererer med). Men her er en undtagelse! Her kan vi uden videre omregne de fysiske (akustiske) mål til de tal, hjernen opererer med, når den omdanner et akustisk fænomen til et bevidsthedsfænomen, til musik.

Som det også fremgår af titlen, handler Helmholtz' bog om musikteoriens fysiologiske grundlag. Helmholtz var barn af positivismen, og billedligt talt var det sanseapparatets og hjernens *hardware* han undersøgte. Tonesystemets principper og dermed musikteoriens grundlag skal imidlertid ikke søges i hardwaren, men i *softwaren*! Vil man forstå, hvordan et computerprogram fungerer, skal man ikke begynde at skille computeren ad!

Det er "in" i dag at beskæftige sig med hjerneforskning, og der skal ikke herske tvivl om, at denne forskning allerede har ført til bemærkelsesværdige resultater. Det er også en kendsgerning, at man kan iagttage aktiviteter i hjernen under musikaflytning, og deraf kan man slutte sig til en hel del om, hvordan hjernen og specielt den auditive cortex fungerer. Det kan så føre til en forbedret behandling af visse hørelidelser, og det kan måske endda være med til at forbedre den musikalske oplevelse. Men det bringer os ikke nærmere til en forståelse af musikkens grundlæggende principper, det fortæller os intet om hvad det er, der udløser dén specifikke oplevelse, der *kan* være forbundet med at lytte til et stykke musik (men langt fra altid er det!) – nemlig den spontane og ubevidste erkendelse af tonesystemets immanente logik – oplevelsen af at befinde sig i en verden, hvor intet er tilfældigt og alt er dybt meningsfuldt.

Behøver jeg at tilføje, at det ikke handler om at reducere Mozart til en matematisk formel. Det handler derimod om at vise, at musikken i selve sit grundlag har rod i noget, vi ikke selv har valgt og kan skalte og valte med efter forgodtbefindende. Det handler om at vise, at den kunstform, vi elsker så højt, er et *endnu* mere forunderligt fænomen, end vi hidtil har troet. Hvad jeg desværre ikke får lejlighed til at komme ind på i denne artikel er, at musikken til syvende og sidst er "en leg med ordnede tidsstrukturer", og dermed bringer den os, på det arketypiske plan, i kontakt med selve tidens mysterium. Derfor er, med Schopenhauers ord, "musikkens virkning også langt mægtigere og dybere end de andre kunstarters, for disse taler kun om skyggen, men denne om selve væsenet."[6]

[5] Man kan undre sig over, at andre ikke for længst har lagt disse tal til grund for en undersøgelse af tonesystemet. En del af forklaringen er utvivlsomt, at Helmholtz' autoritet er så stor, at sådanne tiltag nærmest per automatik bliver stemplet som pseudovidenskab, som noget i stil med cirklens kvadratur, vinklens tredeling og andre notorisk umulige opgaver.

[6] *Die Welt als Wille und Vorstellung*, 3. Bog, hvori Schopenhauer bl.a. behandler kunstarterne.

Introduktion til programmet SKALAGENERATOREN.

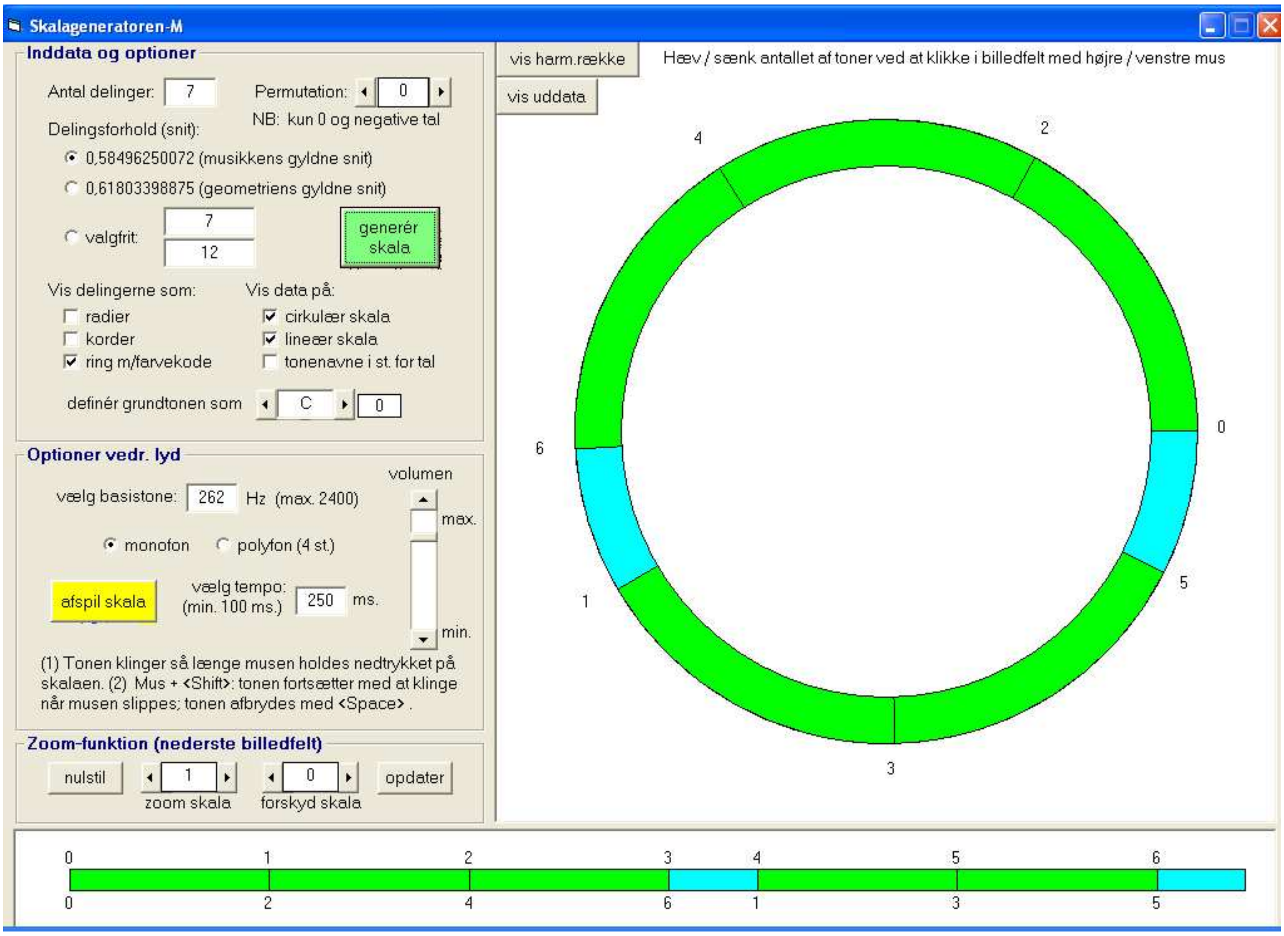
Hvis man ellers har mulighed for at downloade programmet, vil jeg anbefale, at man bruger nogen tid på at arbejde med det, før man læser videre – dog bør man naturligvis først lige læse denne introduktion. Dermed vil man være langt bedre rustet til at forstå teorien. Men også uden at have programmet at støtte sig til, bør man læse introduktionen, for her defineres nemlig en del begreber, som kommer til at spille en vigtig rolle videre frem.

Som navnet siger genererer programmet en skala, idet det på grundlag af et matematisk princip, kaldet *det skaladannende princip*, deler oktaven i et større eller mindre antal intervaller af forskellig størrelse. Intervallernes antal, størrelse og rækkefølge er grundlæggende bestemt af et delingsforhold, der kaldes *snittet* – et begreb der forklares nærmere i den teoretiske del af artiklen. Skalaen vises grafisk på to forskellige måder:

1) som en cirkel, eventuelt opdelt i farvede felter, hvor hvert felt repræsenterer et interval, og hvor hvert interval har sin bestemte farve (der er også andre muligheder, men der om senere), og

2) som en ret linje, nemlig *den tonale målestok*, hvor den samme farvekode anvendes (man må forestille sig, at det er cirklen, som er "klippet" op ved punktet 0 og rettet ud).

De to modeller kan ses i denne afbildning af programmets brugerflade:



Figur 1.1

Det er disse figurer, du få at se, når du lige har åbnet programmet og uden at ændre ved de forskellige tal og indstillinger klikker på den grønne knap med påskriften 'generér skala'. I rammen "Inddata og optioner" kan du se, at antallet af delinger er sat til 7, og som delingsforhold eller snit er valgt tallet 0,58496250072 – et irrationelt tal, der her er vist med ”kun” 10 decimaler (programmet opererer med 15 decimaler). Med dette snit, får du genereret netop de skalaer, du kender fra musikken. Jeg kalder det *musikkens gyldne snit*, og det *er*, som vi senere skal se, rent faktisk beslægtet med det ”rigtige” gyldne snit!

Når antallet af delinger er sat til 7 som i eksemplet, får du genereret den diatoniske skala. Den optræder som bekendt i 7 forskellige skikkelser (matematisk handler det om permutationer), og i dette tilfælde er det den lydiske skala, du får genereret (bemærk at der i indtastningsboksen for permutationer står 0, havde der stået 4, ville du have fået genereret durskalaen). Du vil som musiker umiddelbart kunne genkende de forskellige intervaller: den grønne farve svarer til den store sekund, den blå farve svarer til den lille sekund. Læg mærke til at på ringmodellen er nulpunktet placeret ”klokken 3”, og skalainddelingen skal læses i retning *mod* uret – det er fordi denne model er relateret til *det polære koordinatsystem*.

Klikker du på den gule knap, bliver skalaen automatisk afspillet – naturligvis forudsat computeren er tilsluttet et sæt højttalere eller en hovedtelefon.

Men du kan også afspille skalaen manuelt ved at klikke med musen i de farvede felter (intervallerne) på tegningen forneden. Målestokken fungerer altså som et klaviatur, hvor de farvede felter er tangenterne. Med lidt øvelse kan man sågar spille melodier, og man kan opbygge akkorder – men derom senere.

Computeren udregner i første omgang frekvenstallene, og de omregnes så til binære logaritmer før tegneprocessen begynder. Tonen fremkommer ved at frekvenstallene realiseres som lyd ved hjælp af en virtuel tonegenerator, der indgår som en del af programmet. Tonegeneratoren genererer en simpel sinustone (dvs. en tone uden overtoner), og man skal ikke forvente de store oplevelser hvad klangen angår. Hovedsagen er, at frekvenstallene er korrekte, og at det er de samme vi kender fra musikken.

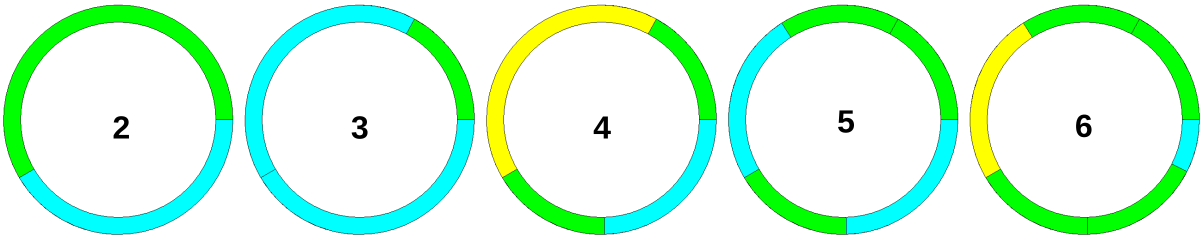
Det er vigtigt at finde et passende volumen (se rammen ”optioner for lyd”); er det for højt, bliver tonen nemt forvrænget.

Tonen i nulpunktet, kaldet *basistonen*, er akustisk defineret ved frekvenstallet 262 Hz. Det svarer til ”C’et ud for nøglehullet” på et klaver. Du kan ændre denne definition (se rammen ”Optioner vedr. lyd”). Hvis du f.eks. skriver 131, vil skalaen klinge en oktav dybere, og skriver du 524, vil den klinge en oktav højere. Der er størst risiko for forvrængning, når frekvenstallet er højt.

<u>Øvelse 1</u>

Åbn programmet og lad alle tal og indstillinger være som de er med undtagelse af den tekstboks, hvor der står ”Antal delinger” – her skriver du 2, og klikker på den grønne knap. Nu er cirklen (dvs. oktaven) delt i et større og et mindre interval, og hvis du lytter til dem (klik med musen på intervallerne på den lineære model), vil du genkende kvinten og kvarten.

Klik så med **højre** museknap et sted på den cirkulære model. Dermed **hæves** antallet af delinger med 1, og tegningen opdateres. Efter at have klikket fem gange, vil du være kommet gennem følgende sekvens af skalaer (tallet i midten angiver antallet af delinger / intervaller):



Figur 2

Lyt til intervallerne og prøv om du kan identificere dem. På nogle trin er der 2, på andre trin 3 forskellige intervaller. Hvad er det for en skala, du hører på trin 5?

Læg mærke til at det samme interval godt kan være repræsenteret ved forskellige farver på de forskellige trin trin; princippet er:

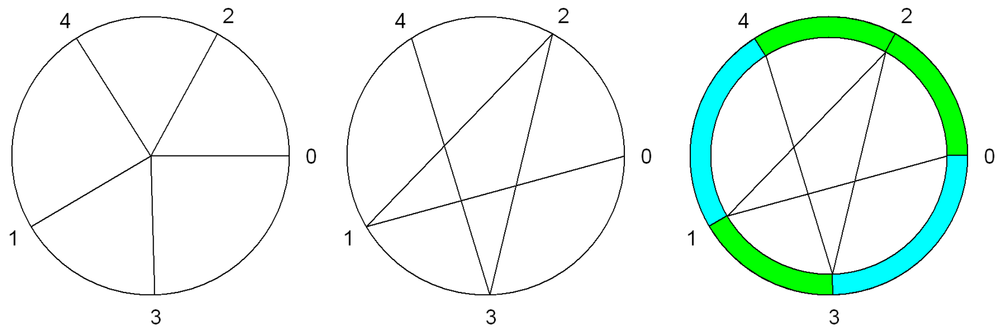
- det første interval efter nulpunktet er altid grønt (husk at forløbet skal læses **mod** uret)
- det sidste interval er altid blåt
- et eventuelt tredje interval (restintervallet) er gult

Klik nu endnu engang med højre museknap (eller skriv 7, dér hvor der står ”Antal delinger”) og klik på den grønne knap . Dermed er du tilbage ved den diatoniske skala. Du kan få programmet til at afspille den automatisk, eller du kan selv ”spille” på ”klaviaturet” (de farvede intervaller). Fortsæt derefter med at klikke på den cirkulære model. Hvornår kommer der næste gang en skala med kun to forskellige intervaller (grøn og blå)?

Skalaen på 12. trin vil du nok forvente skal være den kromatiske skala. Men som du normalt kender den, er den kromatiske skala sammensat af 12 *lige store* intervaller, og her ser du en skala med to forskellige intervaller. Det er fordi, du normalt bruger det *tempererede* tonesystem, og her handler det om det *naturlige* tonesystem. Det kaldes også det *pytagoræiske*, men den betegnelse vil jeg undgå, fordi der knytter sig så mange forkerte forestillinger til den (hvorom mere senere). De to intervaller i den naturlige kromatiske skala er *den lille sekund* og *apotomen* (betyder 'det afskårne', intervallet var allerede kendt og blev navngivet af antikkens teoretikere).

Hvor langt skal vi frem, før der igen kommer en skala med kun to forskellige intervalstørrelser?

I rammen ”Inddata og optioner” kan du også vælge andre måder at få vist delingerne på. Som eksempel ser vi her den pentatone skala, når delingerne bliver vist som (1) radier, (2) korder og (3) en kombination af korder og radier:



Figur 3

Korde-metoden er især nyttig, når det gælder om at følge forløbet. Her er det nødvendigt at forstå, hvad det egentlig er, der sker: Snittet deler i første omgang cirklen i to, og når snittet som her er ca. 0,5850, betyder det, at den første deling finder sted i afstanden 0,5850 fra nulpunktet (husk at delingsforløbet sker i retningen *mod* uret!), og idet cirklen selv sættes lig med 1, svarer det til $360 \cdot 0{,}5850 = 210{,}6°$. Dette punkt er markeret som 1. På næste trin flytter vi igen 0,5850 enheder (eller 210,6°) frem og kommer derved til punktet 2. Det videre forløb er let at følge, når vi bruger korde-metoden.

Øvelse 2

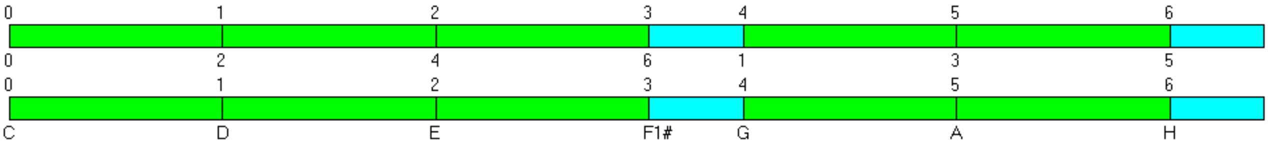
Vælg selv nogle skalaer, og studér dem ved hjælp af de forskellige metoder, som lige er beskrevet. Læg specielt mærke til den orden tallene kommer i, når du følger dem cirklen rundt, idet du begynder ved nulpunktet. Figuren opdateres automatisk, når du skifter til en anden visning.

I den diatoniske skala kommer tallene i denne orden (forudsat permutationen er 0):

O, 2, 4, 6, 1, 3, 5

Kan du finde et princip bag denne orden? Prøv om du kan tolke den musikalsk.

I rammen ”Inddata og optioner” kan du også vælge tonenavne i stedet for tal. Her ser du den lineære model af den diatoniske (lydiske) skala – først med tal og derefter med tonenavne (talrækken over skalaen er blot en løbende nummerering):



Figur 4

Nu er det vist ikke svært at se, hvad tallene musikalsk set repræsenterer! Læg (som en huskeregel) mærke til, at hvert tal er identisk med antallet af fortegn (i dette tilfælde #) i den durtoneart, der har den tilsvarende tone som grundtone.

I rammen ”Inddata og optioner” kan du også vælge hvilken tone, der skal repræsentere nulpunktet. Derom handler den næste øvelse:

<u>Øvelse 3</u>

> Vælg igen den diatoniske skala, og vælg endvidere at få vist tonenavne i stedet for tal. Klik nu gentagne gange på den højre pil, dér hvor der står ”definér grundtonen som:” Med højre pil flytter du grundtonen opad gennem kvintrækken, men venstre pil flytter du den nedad. Programmet opdaterer automatisk. Følg løbende med i hvordan tonenavnene på skalen ændrer sig. Skift ind imellem mellem tonenavne og tal for at sammenligne de to notationsmåder. Læg mærke til, at fra tonen F og videre i subdominantisk retning bliver tallene negative. Prøv at fortolke dette musikalsk.
>
> Af tekniske grunde skrives 2# og 2*b* i stedet for dobbelt kryds og dobbelt be. Du kan fortsætte op og ned gennem kvintrækken så langt du vil, og dermed vil du også se f.eks. 3#, 4#, 5# osv. Vælg også nogle ”vilde” tonearter (f.eks gisis-dur, eller ases-dur)!

Det er nu tiden at omtale funktionen ”permutation” (se øverste linje i rammen ”Inddata og optioner”). Som allerede nævnt er de forskellige varianter af den diatoniske skala (foruden dur og mol de såkaldte kirketonearter) matematisk set permutationer. Når permutationen er 0, får vi genereret den lydiske skala. Det er en følge af at genereringen følger kvintrækken og begynder ved tonen C; dermed bliver den 7. tone et Fis:

C – G – D – A – E – H – Fis

Regnet fra begyndelsespunktet kommer Fis imidlertid ind på 4. plads, dvs. vi får dannet den lydiske skala. Hvis vi begynder en kvint dybere, altså på F, er det denne kvintrække, skalaen bliver genereret ud fra:

F – C – G – D – A – E – H,

Skalaen består nu udelukkende af de såkaldte stamtoner, og med C som grundtone, får vi da dannet C-dur skalaen.

At vi begynder en kvint dybere, udtrykkes i programmet ved, at der i indtastningsboksen for permutation skal stå –1. Det sørger programmet imidlertid selv for, idet valget er knyttet til en scrollfunktion. Det eneste du behøver at huske er, at det højeste tal er 0.

Det er naturligvis ikke kun er den diatoniske skala, der kan permuteres, det kan f.eks. også den pentatone og den kromatiske skala, men i den vestlige musik er det kun den diatoniske skalas permutationer, der er navngivet. Sammenhængen mellem permutationstal og skala kan ses i denne tabel:

0	lydisk
–1	dur (jonisk)
–2	mixolydisk
–3	dorisk
–4	mol (æolisk)
–5	frygisk
–6	hypofrygisk

Vælger man en anden basistone, vælger man dermed også en anden grundtone. På den måde kan man få dannet enhver tænkelig skala med enhver tænkelig grundtone. Eksempelvis kan man få dannet en Gisis-dur skala – og hvis man er i tvivl om, hvilke fortegn der skal bruges i den forbindelse, kan man bare generere skalaen og se facit på skærmen!

Øvelse 4

> Vælg igen den diatoniske skala, og afprøv dens forskellige permutationer – både visuelt og auditivt! Vælg også forskellige grundtoner – og læg mærke til at det ikke kun er tonenavnene, der ændrer sig, men det gør også tonehøjden.
>
> Afprøv også den pentatone med forskellige grundtoner. Du kan også afprøve permutationerne. De melodier, der kan spilles på den pentatone skala, får en meget forskellig karakter, alt efter hvilken permutation vi vælger – alligevel har vi ingen navne for dem.
>
> I den naturligt dannede kromatiske skala er forskellen mellem de to intervaller så lille, at man næppe vil bemærke nogen forskel i karakteren, om man vælger den ene eller den anden permutation – men prøv alligevel!
>
> Undersøg også hvilke fortegn den kromatiske skala får med diverse grundtoner.

De foregående øvelser har alle været baseret på snittet (delingsforholdet) 0,58496250072, også kaldet *musikkens gyldne snit*. Ethvert snit, dvs. ethvert tal mellem 0 og 1, vil imidlertid resultere i dannelse af et system af skalaer, og hver af disse skalaer vil ligeledes være sammensat af enten 2 eller 3 forskellige intervalstørrelser. Det peger i retning af, at der er tale om *et almengyldigt matematisk princip*. Men nogle forsøg vil hurtigt overbevise os om, at ingen af disse andre skalasystemer fungerer musikalsk. Det peger i retning af, at der ud over det matematiske princip også spiller *en psykologisk faktor ind* – og vel at mærke en *naturligt* betinget faktor !

For at give brugeren en mulighed for selv at efterprøve dette, er programmet også forsynet med et par indtastningsbokse, hvor man selv kan vælge snittet. Desuden er et andet specielt snit medtaget, nemlig det fra geometrien, arkitekturen og billedkunsten kendte *gyldne snit*, hvis talværdien er med en rimelig tilnærmelse er 0,618034.

Øvelse 5

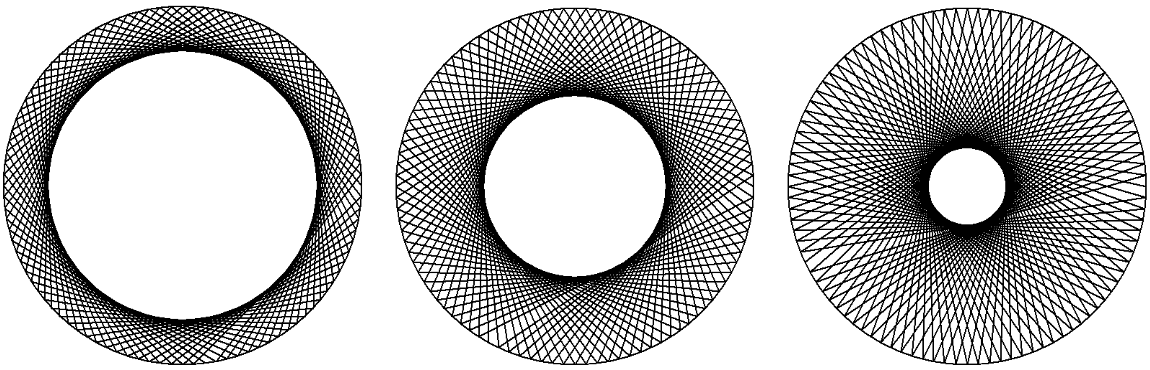
> Vælg ”geometriens gyldne snit”, sæt antallet af delinger til 2 og klik på den grønne knap. Den første deling ligger nu et andet sted end før. Følg derefter trinene fra 2 og videre opad, ider du klikker med højre museknap på den cirkulære model. Skriv ned på hvilke trin det tilfælde indtræffer, hvor skalaen er sammensat af kun 2 forskellige intervalstørrelser, dvs. kun grønne og blå intervaller. Hvis du kender lidt til matematik, vil du opdage, at tallene følger Fibonacci-rækken!
>
> Du kan se hele Fibonacci-rækken, når du klikker på den knap øverst i det store tegnefelt, hvor der står ”vis harm.række”. Vælg et tilfældigt tal ud fra rækken, indsæt det i indtastningsboksen ”Antal delinger” og klik på den grønne knap – uanset hvilket tal du har valgt fra denne række, vil du nu se en skala med udelukkende grønne og blå intervaller.
>
> Det samme kan du gøre med ”musikkens gyldne snit”. Nu vil du ganske vist se en noget anden talrække, men den er baseret på samme princip. Generelt gælder det nemlig, at der til ethvert snit svarer der en talrække af denne type – jeg kalder dem i denne forbindelse ”harmoniske rækker”, og du kan læse mere om dem i det teoretiske afsnit.
>
> Du kan også afspille ”Fibonacci-skalaerne”, og du kan spille ”melodier” på dem – men du vil opdage, at det ikke har meget at gøre med det, vi normalt forstår ved musik.

Som en tredje mulighed kan du selv vælge snittet (se ”valgfrit snit” i rammen ”Inddata og optioner”). Dermed forlader vi ganske vist emnet, og begynder at se skaladannelsen i et perspektiv, der rækker langt ud over musikken. Dette perspektiv kan man studere langt mere detaljeret i den fuldt udbyggede version af programmet[7]; men du får her en forsmag, og du kan desuden selv efterprøve, om der skulle være andre snit, der fungerer musikalsk. Der er i hvert fald ét, sådan som du vil få at se og høre i den næste øvelse. Men først et par ord om”valgfrit snit”.

Snittet er et udtryk for forholdet mellem to enheder på en målestok. Når det handler om tonesystemet, er de to enheder oktaven og kvinten. Dette forhold er irrationelt og kan derfor kun udtrykkes som en tilnærmelse, normalt som en decimalbrøk. Hvis snittet derimod er rationelt, kan det udtrykkes som en almindelig brøk. Tælleren repræsenterer den mindre enhed, nævneren den større. Du skal altså vælge både tæller og nævner (vælger du en brøk, som kan forkortes, sørger programmet automatisk for det). I denne version af programmet kan du ikke bruge decimalbrøker; men vil du f.eks. indtaste en rimelig tilnærmelse til ”musikkens gyldne snit”, kan du i stedet skrive 5849625 / 10000000.

Når du bruger korde-metoden, vil du opdage, at snittet ofte resulterer i dannelsen *visuelt* interessante figurer, nemlig stjernepolygoner. Her er tre eksempler. Snittet er som brøk tilføjet oven over figurerne. Dog mangler i hver polygon den sidste korde, som skal forbinde slutpunktet med begyndelsespunktet; fortolket som en skala, kan der nemlig ikke være flere korder end nævneren angiver (i eksemplerne mangler korde nr.101). Læg også mærke til, de sædvanlige tal rundt om figuren mangler; det er fordi fluebenet ved ”vis data på cirkulær skala” er fjernet.

23 / 100 33 / 100 43 /100



Figur 5

Øvelse 6

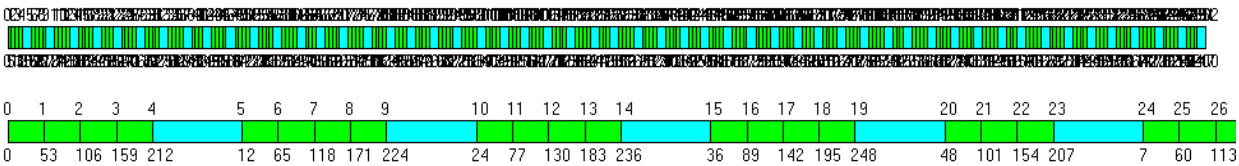
Begynd igen med den diatoniske skala. Betragt den nøje før du derefter sætter et flueben i checkboksen ”valgfrit snit”, og derefter – uden at ændre hvad der allerede står – klikker på den grønne knap. Hvad du nu får at se (og høre) adskiller sig kun umærkeligt fra den diatoniske skala. Det er nemlig den **tempererede** diatoniske skala. Default-værdierne er 7 /12, og det betyder i en musikalsk fortolkning, at 7 oktaver ækvivalerer med 12 kvinter – hvilket jo netop er definitionen på det tempererede tonesystem.

Hvis du nu gradvist lader antallet af delinger vokse, kommer du naturligvis igen til den kromatiske skala på 12. trin, *og denne gang er alle intervaller lige store*. Længere end til nævnerens værdi, i dette tilfælde 12, kan du ikke komme, for nu er der tale **om et lukket system**.

Prøv også at generere skalaer med diverse andre snit. Undersøg hvor de ”harmoniske ” skalaer dannes. Lyt til disse skalaer og at spil på ”tangenterne” i det nederste billedfelt – hvad mener du om ”musikken”?

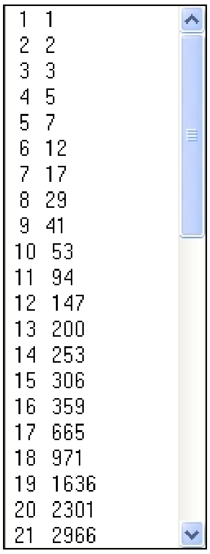
[7] Den fuldt udbyggede version, SKALAGENERATOREN-MAT, kan downloades fra www.josebamus.dk/matematik

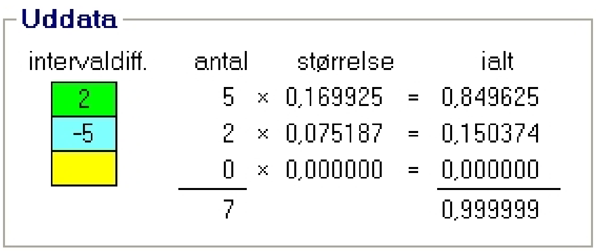
Når skalaen har mange intervaller, kan det være svært at skelne disse fra hinanden, og tallene begynder også at overlappe hinanden. På den lineære model i nederste billedfelt kan du så bruge zoom-funktionen. I den næste figur kan du se et eksempel. Øverst ser du tonesystemets 253-skala, og nederst ser du begyndelsen af samme skala forstørret 10 gange. Resten af skalaen kan du se, når du bruger funktionen ”forskyd skala”. En rød afmærkning langs cirkel-modellens periferi viser dig hvilken del af skalaen, du har zoomet ind på. Hver gang du har valgt en ny indstilling, skal du klikke på knappen ”opdater”.



Figur 6

Øverst til venstre i det store billedfelt ser du to knapper med påskrifterne ”vis harm.række” og ”vis uddata”. Når du – uden at have ændret ved default-indstillingerne – klikker på den første, kommer talrækken, der ses nedenfor til venstre til syne (her vist noget formindsket), og når du klikker på den anden, ser du opstillingen til højre:





Figur 7

Talrækken er den såkaldte *harmoniske række*, som i eksemplet er identisk med de skalaer, der genereres ved *musikkens gyldne snit* (hvis du i stedet vælger det ”rigtige” gyldne snit, vil du få dannet Fibonacci-rækken!). Under ”Uddata” kan du aflæse antallet og størrelsen af den aktuelle skalas intervaller, og du kan desuden se *intervaldifferenserne*, som er et vigtigt matematisk redskab, når man skal analysere skalaerne – men derom kan du læse i artiklens teoretiske del.

* * *

Jeg mangler nu kun at give nogle lidt mere detaljeret anvisninger på, hvordan man kan spille på ”tangenterne” i nederste billedfelt, og hvordan man kan opbygge akkorder.

Du har allerede set – og har forhåbentlig også prøvet – at tonen fremkommer, når man klikker med musen på skalaen i nederste billedfelt, idet de farvede intervaller fungerer som tangenterne på et klaviatur. Normalt stopper tonen, i samme øjeblik musen slippes, men den fortsætter med at klinge, hvis du samtidig med holde SHIFT-tasten nedtrykket. I sidstnævnte tilfælde afbrydes tonen med SPACE-tasten (mellemrumstangenten); men du kan også bare klikke i billedfeltet **over eller under**

skalaen. Ved nu at holde venstre hånds lillefinger parat over SHIFT og pegefingeren parat over SPACE, samtidig med at du betjener musen med højre hånd, kan du med lidt øvelse spille melodier og endda med en rimelig frasering.

Klikker du **til højre for skalaen**, hører du den **første tone i den næste oktav**. Klikker du **til venstre for skalaen**, hører du den **sidste tone i den foregående oktav** (f.eks. hører du i en C-dur skala et H). På den måde disponerer du altså over ialt 7 + 2 toner.

I rammen ”optioner vedr. lyd” kan du vælge mellem ”monofon” og ”polyfon”. I første tilfælde hører du kun én tone ad gangen, i andet tilfælde kan du høre op til 4 toner samtidig, dvs. du kan spille akkorder. Hvis du tilføjer en 5. tone, vil denne træde i stedet for den første, en 6. tone vil træde i stedet for den anden og så fremdeles – med andre ord vil du så køre i ring.

Du kan kun spille polyfont, altså tilføje nye toner, så længe du holder SHIFT-tasten nedtrykket. Du afbryder en akkord med SPACE (mellemrumstangenten), men du kan også bare klikke i billedfeltet **over eller under skalaen**.

Det skal endnu engang fremhæves, at det er vigtigt at finde et passende volumen, for er dette for højt, bliver tonen nemt forvrænget, og det gælder især, når flere toner klinger samtidigt.

<u>Øvelse 6</u>

> Generer en durskala og vælg ”polyfon”. Hold venstre SHIFT-taste nedtrykket og klik med musen på første, tredje og femte interval. Hvad hører du nu? Prøv også diverse andre kombinationer. Er du musiker, vil du snart finde ud af, hvor de forskellige akkorder ligger.
>
> Sammenlign nogle af de netop hørte akkorder med de tilsvarende tempererede akkorder. Når du skifter fra det ene til det andet snit afbrydes en eventuelt klingende akkord automatisk. Vent ikke for længe med at skifte, så du stadig have den gamle klang i øret og kan sammenligne den med den nye.
>
> På den kromatiske skala kan du høre akkorder, der indbefatter apotomen – og på 17-tone skalaen kan du høre akkorder, der indbefatter det pytagoræiske komma.
>
> Slip fantasien løs! Det eneste du ikke kan høre er visse af de intervaller og akkorder, som anvendes i *uligesvævende* temperaturer – for de hører hverken hjemme i det tempererede eller det naturligt dannede tonesystem!

De tonale enheder og Den tonale målestok

Tonesystemet er grundlæggende defineret ved blot 2 intervaller, oktaven og kvinten. Det er denne oprindeligt empiriske iagttagelse vi går ud fra, når vi stemmer et klaver eller andet tasteinstrument. Vi definerer de toner, der ligger inden for rammerne af en oktav, som elementer i en følge af kvinter, og idet oktaven selv definerer de tonalt identiske toner, er tonerne i alle andre oktavområder dermed også bestemt. At toner, der er elementer i en følge af oktaver, er tonalt identiske, er ligeledes en erfaring, og den kommer bl.a. til udtryk ved, at vi betegner sådanne toner ved samme tonenavn.

Det er ikke noget vi har vedtaget, men det hænger sammen med, at vi *naturligt* fortolker et toneforløb over en oktav som en periode, som noget der gentager sig, og dermed er oktaven også *den naturligt definerede tonale enhed*. Det er vigtigt at skelne mellem oktaven som interval og oktaven som periode eller enhed. Matematisk set kunne ethvert interval fungere som enhed (ligesom der ikke er noget til hinder for, at vi kunne vælge et andet grundtal for vores talsystem end 10), men i musikkens virkelighed er det kun oktaven, der fungerer på denne måde. Akustisk er oktaven defineret ved at frekvenstallet fordobles, og vi kan således opfatte den som grundtallet i et talsystem, nemlig 2-tal systemet eller det binære talsystem, det simpleste af alle talsystemer og det som også al elektronisk databehandling er baseret på. Og den kendsgerning, at vi kun kan opfatte oktaven og ikke noget andet interval som periode, indikerer, at selve sanseapparatet og den dertil knyttede ”cerebrale software” på en eller anden måde også må være baseret på dette talsystem.

I den følgende tabel er frekvenstallene for en række oktaver (øverste række) sammenholdt med de tilsvarende tonale mål (nederste række):

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Frekvenstallene er i denne forbindelse ikke udtrykt i enheden Hertz, men de angiver tonernes placering på naturtoneskalaen, og jeg symboliserer dem i denne forbinelse ved bogstavet N. De tonale mål symboliserer jeg ved det græske bogstav θ (theta). Forholdet mellem de to måleenheder er da udtrykt i denne simple formel:

$$N = \theta^2$$

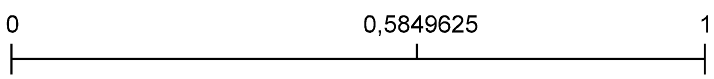
Her kan de akustiske mål afledes af de tonale. Vi har imidlertid brug for at gå den modsatte vej, for de tonale mål kan nemlig ikke måles direkte, men de må afledes af de akustiske. Derfor skal vi bruge den omvendte formel:

$$\theta = log_2(N)$$

Men igen handler det egentlig blot om at finde kvintens tonale mål, for når vi kender det, kan vi let beregne alle andre intervaller. Idet kvintens akustiske mål (dens frekvenskvotient) er 3/2, har vi

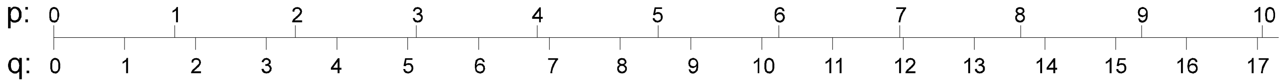
$$\theta = log_2(3/2) = 0{,}5849625$$

Nu kender vi kvintens placering på den tonale målestok – her er den vist i 1. oktav:



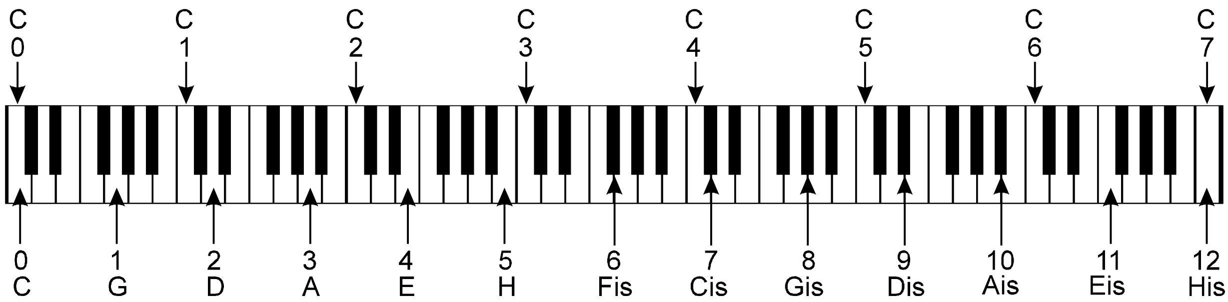
Figur 1

I den næste tegning er oktaven afsat 10 gange ud ad denne målestok, og samtidig dermed er kvinten afsat 17 gange. Kvintens størrelse er nu ikke længere noteret ved sin tonale værdi, men hver af de to skalainddelinger følger talrækken[8]. Desuden er de to enheder nu symboliseret ved bogstaverne p og q (som en huskeregel kan p tolkes som **p**eriode, og q kan tolkes som **q**uint):



Figur 2

Som sagt kan klaviaturet betragtes som en fysisk realisation den tonale målestok. Det bliver tydeligt, når vi betragter den næste figur, hvor jeg har markeret de to inddelinger i fig.2 og desuden har tilføjet tonenavnene. Jeg har her ikke omtydet tonenavnene, således som man normalt gør i det tempererede tonesystem hvor f.eks. Gis er identisk med As, Dis er identisk med Es osv.



Figur 3

Det skal i denne forbindelse også nævnes, at opdelingen i sorte og hvide tangenter er andet og mere end en anatomisk hensigtsmæssig fordeling af tangenterne; opdelingen afspejler tillige den *naturligt definerede* relation mellem den pentatone skala (repræsenteret ved de sorte tangenter), den diatoniske skala (repræsenteret ved den hvide tangenter) og den kromatiske skala (repræsenteret ved både de sorte og de hvide tangenter). Matematisk betyder det, at skalaerne hver især ikke bare er isolerede størrelser, men de er indbyrdes forbundne i kraft af en bestemt lovmæssighed – de udgør et naturligt defineret *system* af skalaer.

Den tonale målestok kan åbenbart inddeles på flere forskellige måder (pentatont, diatonisk osv.) og dertil kommer, at inddelingen ikke er ækvidistant. Alligevel adskiller den sig principielt ikke fra de målestokke, vi kender fra hverdagen. Disse er normalt også inddelt efter to (og undertiden flere) forskellige enheder – eksempelvis er en meter inddelt i centimeter, en alen er inddelt i tommer, en time er inddelt i minutter osv.. Men dér er den mindre enhed altid valgt, så den går op i den større, og dermed vil inddelingen blive ækvidistant. Sådan er det ikke på den tonale målestok. Kvinten går *ikke* op i oktaven, og inddelingen bliver *ikke* ækvidistant. Det bemærkelsesværdige er imidlertid, at der undervejs i delingsforløbet ”udkrystalliserer” sig nogle skalastrukturer, der er sammensatte af *to* forskellige intervalstørrelser, hverken mere eller mindre, og det er i disse ikke-ækvidistante strukturer vi genkender musikkens skalaer. Eksempelvis er den diatoniske skala sammensat af 5 større og 2 mindre intervaller. Dette er en naturlig følge af det, der i matematikken kendt som *Steinhaus' teorem* – og her har vi forklaringen på det, Helmholtz omtaler som ”diese merkwürdige Ungleichkeit”!

Da $log_2(3/2) = 0{,}5849625$ er et irrationelt tal, vil de to inddelinger aldrig mødes; men i fig.2 kan vi se, at de er tæt på at mødes ved p = 7 og q = 12. Det er dette forhold man udnytter i *det tempererede tonesystem*. Idet man her sætter 7 oktaver lig med 12 kvinter, bliver forholdet mellem de to enheder 7/12 = 0,583333, altså tæt på der rigtige tal. I dette tilfælde bliver den kromatiske skala ækvidistant

[8] Læg mærke til at ordet 'skala' er den generelle betegnelse for inddelingen på en målestok. Der er altså her sammenfald mellem musikalsk og matematisk terminologi. Det samme gælder ordet 'interval', der i musikken betyder afstanden mellem to toner, i matematikken afstanden mellem to tal – men egentlig handler det om det samme, blot kalder vi det tal, når vi behandler det abstrakt, og vi kalder det toner, når det realiseres som lyd.

– men til gengæld er antallet af skalaer dermed også udtømt. Længere fremme på skalaen (nu handler det igen om fig.2) vil de to inddelinger komme endnu tættere på hinanden, men nu er oktaven i mellemtiden blevet delt i så mange og så små intervaller, at en sådan ”temperatur” ikke er anvendelig i praksis. Det såkaldte ”temperaturproblem” behandler jeg mere udførligt senere.

Med lidt god vilje kan man godt demonstrere skaladannelsen med udgangspunkt i fig.2. Men da det jo handler om et periodisk eller cyklisk forløb, er det langt lettere at demonstrere, hvordan skalaerne dannes, når vi tolker forløbet som en cirkel, hvor et helt kredsløb repræsenterer oktaven. Matematisk handler det om at beskrive forløbet i *det polære koordinatsystem*; i en mere populær formulering handler det om, at målestokken i fig.2 bliver rullet sammen som en cirkel, hvis omkreds er lig med den primære enhed (oktaven). Den sekundære enhed (kvinten) vil da blive markeret på stadig nye steder, og tonernes oprindelige numeriske orden bliver derved ombyttet med en ny orden, som i en musikalsk fortolkning afspejler de tonale funktioner (tonika, dominant, subdominant osv.).

”Den indfoldede orden” og ”musikkens gyldne snit”

Processen minder i påfaldende grad om det, den bekendte fysiker David Bohm kalder *indfoldning*, og som han bl.a. beskriver i bogen *Wholeness and the implicate order* (1983)[9]. Her handler det om den orden, der hersker mellem fysikkens elementarpartikler, og Bohm taler i denne forbindelse om den udfoldede og den indfoldede orden. Men den musikbegavede fysiker nævner selv, at det er noget lignende vi oplever, når vi lytter til musik:

> ”Hovedforskellen mellem disse tilfælde er, at i elektronmodellen opfattes den indfoldede orden *i tanken* som den samtidige tilstedeværelse af gruppers forskellige men gensidigt forbundne transformationsgrader, mens den indfoldede orden i forbindelse med musikken *sanses umiddelbart* som den samtidige tilstedeværelse af mange forskellige men gensidigt forbundne transformationer af toner og lyde. Heri er der en følelse af både spænding og harmoni mellem de mange forskellige, samtidigt forekommende transformationer, og denne følelse er netop det, som er primært i opfattelsen af musikkens udelte tilstand af flydende bevægelse. Når man lytter til musik, *sidder man derfor og opfatter en indfoldet orden direkte med sanserne*”.[10]

Jeg mindes ikke i den egentlige musiklitteratur at have fundet en bedre beskrivelse af, hvad det er der rører sig dybest nede i musikken, og jeg har da også gjort Bohms betegnelser til mine egne: *Den tonale målestok som den er fremstillet i fig.2, repræsenterer den udfoldede orden, de skalaer, der fremkommer ved oktavens deling, repræsenterer den indfoldede orden*. Hvor fremmed disse begreber måske også umiddelbart forekommer en musiker at være, så skal det dog snart vise sig, at det blot er andre udtryk for velkendte musikalske begreber. I det hele taget vil man opdage, at musikkens begreber, terminologi og nomenklatur – i hvert fald hvad angår tonesystemets elementer og strukturer – uden videre kan ”oversættes” til matematik, ja faktisk kan betragtes som et alternativt matematisk symbolsprog!

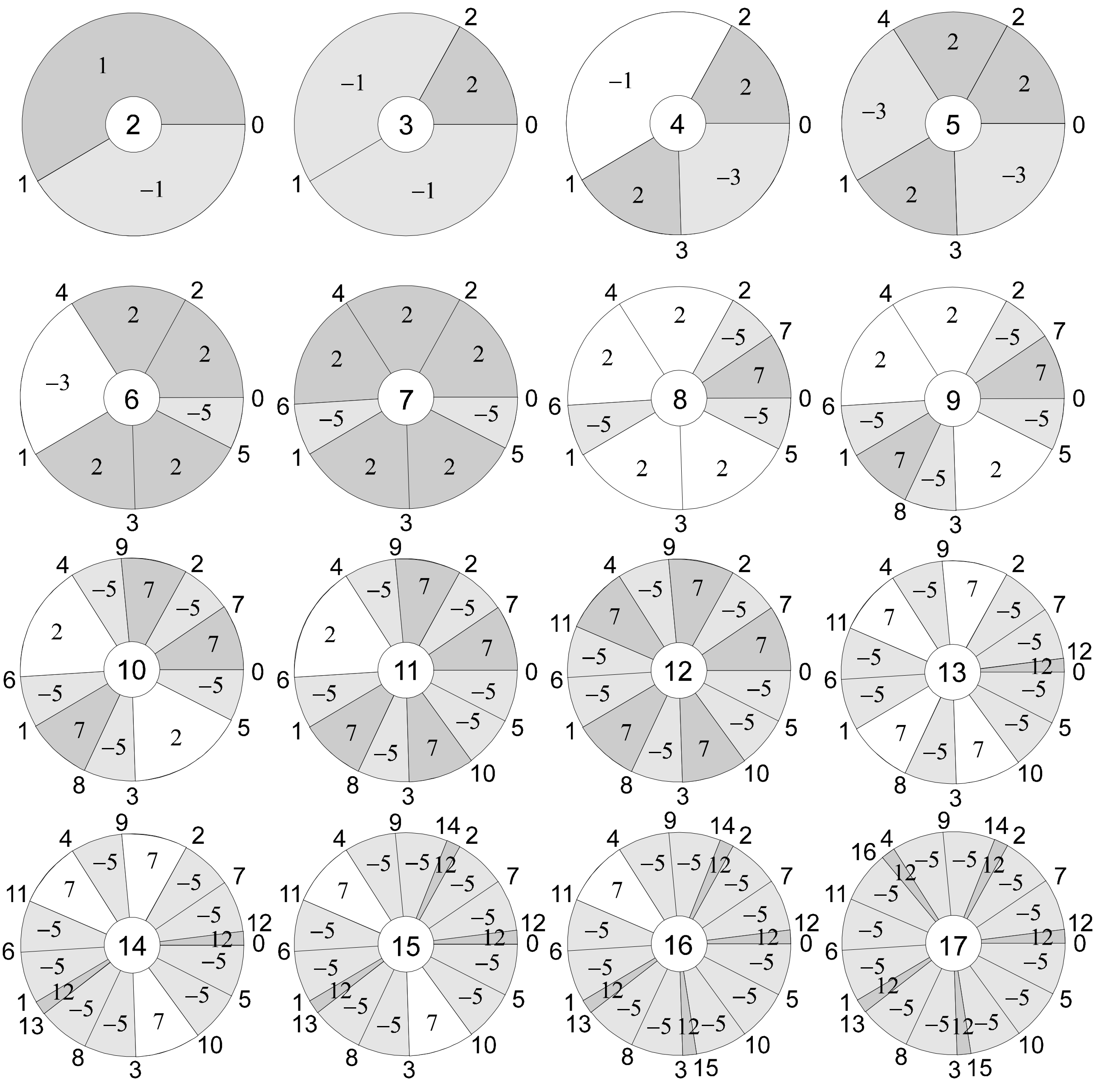
Skaladannelsen trin for trin

Vi vil nu følge skaladannelsen trin for trin, idet vi som før omtalt ruller den tonale målestok (fig.2) sammen som en cirkel, hvis omkreds er lig med den tonale enhed, dvs. oktaven. Kvintskalaens toner vil da blive markeret på stadig nye steder, og deres oprindelige numeriske orden bliver derved ombyttet med en ny orden.

I den næste figur kan vi se de 17 første trin (et trin betyder et trin på kvintskalaen). Når forløbet regnes fra det punkt på cirklen, der svarer til ”klokken 3” på uret, og når bevægelsen er modsat urets, er det fordi figurerne er relateret til det polære koordinatsystem. De store tal i midten af cirk-

[9] Udgivet på dansk som *Helhed og den indfoldede orden*, Forlaget ASK, 1986.
[10] s.179 i den danske udgave; fremhævelserne er Booms egne.

lerne er en nummerering af trinene (det første trin, den ubrudte cirkel, er ikke medtaget); men de angiver samtidig hvor mange intervaller, oktaven er blevet opdelt i på det pågældende trin. De mindre tal uden for cirklen angiver den rækkefølge, hvori delingen sker. De er identiske med nummereringen af kvinterne i fig.2; men når vi nu følger disse tal fra nulpunktet og cirklen rundt, ser vi at den oprindelige numeriske orden er blevet afløst af en ny orden, *den indfoldede orden* (f.eks. er på trin 7 den indfoldede orden: 0, 2, 4, 6, 1, 3, 5).



Figur 4

Intervallernes størrelse er markeret med en farvekode. I SKALAGENERATOREN anvendes farverne grøn, blå og gul, men de er i denne tegning (som går tilbage til tiden før SKALAGENERATOREN!) ombyttet med mørkegråt, lysegråt og hvidt. Vælger vi igen trin 7 (den diatoniske skala) som eksempel, ser vi at oktaven er delt i 5 større og 2 mindre intervaller. Intervallernes størrelse kan desuden aflæses af de små tal inden for cirklen. På trin 7 er de større intervaller identificeret ved tallet 2, mens de mindre intervaller er identificeret ved tallet –5. Disse fortegnsbestemte tal fremkommer som differensen mellem tallene i den indfoldede orden, og jeg betegner dem derfor som *intervaldifferenser* – men derom mere senere.

I løbet af de første 17 trin indtræffer det tilfælde, hvor antallet af intervaller er reduceret til 2, i alt 6 gange, nemlig på trin 2, 3, 5, 7, 12 og 17. Hvis vi fortsætter forløbet, vil vi finde, at de næste tilfælde indtræffer på trin 29, 41, 53, 94, 147 og 200 – og rækken fortsætter i det uendelige. En sammenligning med Fibonacci-rækken er nærliggende, og faktum er da også, at de to rækker er nært beslægtede. Som før nævnt svarer der til ethvert tal mellem 0 og 1 et unikt systemet af skalastrukturer, men der svarer også en unik talrække, idet hver af disse strukturer udvikler sig efter denne række. Til tallet 0,618034 – det gyldne snit – svarer Fibonacci-rækken, til tallet 0,5849625 – musikkens gyldne snit – svarer den netop nævnte række, som jeg kalder *Schandorf-rækken* – efter den danske-musikforsker Frede Schandorf, der som den første påviste, at musikkens skalaer udvikler sig efter denne række[11].

Til sammenligning er begyndelsen af de to rækker her stillet op under hinanden:

> Fibonacci-rækken: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597 . . .
> Schandorf-rækken: 1, 2, 3, 5, 7, 12, 17, 29, 41, 53, 94, 147, 200, 253, 306, 359, 665 . . .

Fibonacci-rækken kan som bekendt dannes ved at man løbende lægger det aktuelle tal sammen med det foregående. Men der findes en mere generel formel, dvs. en formel, der omfatter *alle* de rækker, hvorefter skaladannelsen finder sted – og altså også Schandorf-rækken. Det vender jeg tilbage til længere fremme i denne artikel.

De skalaer der er defineret ved Schandorf-rækken, kalder jeg *de harmoniske skalaer*. Ikke fordi de akustisk set udmærker sig ved at være særligt harmoniske, men det er en gammel betegnelse, som jeg i denne forbindelse finder er blevet relevant igen.[12]

[11] Schandorf's opdagelse går helt tilbage til 1960'erne, men opdagelsen er den dag i dag lidet påagtet af den etablerede musikforskning. Det skyldes dog nok mest, at Schandorf har udviklet sin helt egen form for matematik, kaldet *chronomatik*, som det mig bekendt kun er lykkedes meget få, om overhovedet nogen at forstå, og lettere bliver det ikke af, at Schandorf's talrige chronomatiske afhandlinger ikke er offentligt tilgængelige, men kun foreligger i form af maskinskrevne og fotokopierede hefter. Skønt jeg også selv har måttet opgive at forstå ret meget mere end det indledende kapitel af chronomatikken, har mit personlige møde med Schandorf i 1984 og den efterfølgende korrespondance været til stor inspiration. Det var først, da jeg blev gjort bekendt med det ordningsprincip, som jeg nu kalder Schandorf-rækken (og som han for øvrigt selv kalder "tonale excitationer"), at der for alvor kom skred i min egen forskning på området.

Det bør også nævnes, at en amerikansk musikforsker, Norman A. Carey i 1998 blev doktor på en afhandling med titlen *Distribution Modulo 1 and Musical Scales* (University of Rochester). Uden at der er nogen som helst grund til at tro, at han har været bekendt med den skandinaviske forskning i emnet, beskriver han her Schandorf-rækken, som han kalder "The Well-formed Scale Sequence", og det jeg kalder harmoniske skaler, kalder han 'Well-formed Scales'. I det hele taget stemmer Careys konklusioner og teoremer stort set overens med det, som både Schandorf og jeg selv på hver sin måde var kommet frem til adskillige år forinden. Jeg nævner dette i håb om, at den hjemlige musikvidenskabelige sagkundskab vil vågne op af sin dvale!

[12] Flere af 1600-tallets musikteoretikere betegnede de tilfælde, hvor der er et sammenfald mellem oktaverne og kvinterne (sml. fig.2) som "harmoniske cykler". Disse cykler er (i hvert fald delvis) sammenfaldende med de skalaer, der er bestemt af Schandorf-rækken. Jeg har andetsteds foreslået at betegne disse skalaer som *bi-intervalliske*, men unægtelig falder dette ord ikke let på tungen, og jeg foretrækker her den musikalsk set mere velklingende betegnelse *de harmoniske skalaer*.

Intervallernes definition

Intervaldifferenserne spiller en vigtig rolle i den musikalske fortolkning af skaladannelsens mekanik, idet de *éntydigt* definerer de forskellige intervaller. De fremkommer som sagt som differensen mellem tallene i den indfoldede orden, dvs. ved at vi løbende trækker det foregående tal fra det aktuelle tal, og de er karakteristiske for det pågældende interval. I det følgende eksempel, handler det igen om den diatoniske skala:

den indfoldede orden	0	2	4	6	1	3	5	0
intervaldifferenserne		2	2	2	–5	2	2	–5

Som allerede nævnt svarer intervaldifferensen 2 til den store sekund, og –5 svarer til den lille.

Fordelen ved intervaldifferenserne er, at vi kan *regne* med dem. Det kan vi ikke med begreber som 'den store sekund', 'den lille sekund' osv. Vi ved, at når vi føjer en stor sekund til en lille sekund, får vi en lille terts, men det er noget vi har lært. Med indførelsen af begrebet intervaldifferens hedder regnestykket $2 + (-5) = -3$. Den lille terts er altså karakteriseret ved intervaldifferensen –3. Her er endnu et eksempel: I en verbal formulering hedder det: fem store sekunder og to små sekunder danner tilsammen en oktav. Nu hedder det: $5 \cdot 2 + 2 \cdot -5 = 0$.

Oktaven er altså karakteriseret ved intervaldifferensen 0, og som den første deling er kvinten er karakteriseret ved intervaldifferensen 1. Men faktisk kan vi også aflæse de forskellige intervallers intervaldifferens på den tonale målestok i fig.2. Begyndelsen af målestokken gentages her, og tonenavnene tilføjes:

Figur 5

For hver tone på kvintskalaen gør vi nu det, at vi udtrykker intervallet mellem tonen og den nærmeste *foregående* oktav i bogstav- og talnotation. Når vi eksempelvis er fremme ved den 6. tone på kvintskalaen (Fis) udtrykker vi intervallet mellem denne tone og den foregående oktav som $6q - 3p$. Tonalt set er dette interval identisk med det interval, der er defineret som 6q (sidstnævnte har ikke noget navn, men det svarer til at en decim er tonalt identisk med en stor sekund). Tonalt set er intervallet altså allerede karakteriseret ved det første led, og her kan vi ydermere tillade os at se bort fra bogstavet q. Tilbage står nu intervaldiffensen!

For en musiker er det ikke svært at se, at vi i eksemplet har at gøre med den forstørrede kvart. I den følgende tabel er beregningerne gennemført til og med q = 6, intervalnavnene er tilføjede og i sidste kolonne er også intervallernes størrelse tilføjet. Størrelsen findes ganske enkelt ved at gange kvintens størrelse (som vi tidligere har beregnet til 0,5849625) med intervaldifferensen, idet vi ser bort fra det hele tal foran kommaet (dette tal fortæller hvor mange oktaver tonen er beliggende fra nulpunktet, men vi ønsker at finde afstanden fra den nærmest foregående oktav).

interval	intervalnavn	beregning	int.dif.	størrelse
C → G	kvint	1q – 0	1	0,5849625
C → D	stor sekund	2q – 1p	2	0,1699250
C → A	stor sekst	3q – 1p	3	0,7548875
C → E	stor terts	4q – 2p	4	0,3398500
C → H	stor septim	5q – 2p	5	0,9248125
C → Fis	forstørret kvart	6q – 3p	6	0,5097750

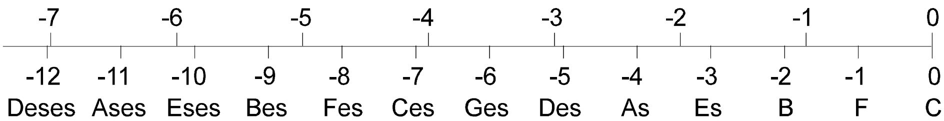
Vi gentager nu beregningerne, idet det denne gang handler om at finde intervallet mellem tonen og den nærmeste *efterfølgende* oktav. Dermed får vi bestemt de intervaller, der i musikalsk terminologi betegnes som *omvendinger* til de førstnævnte intervaller. Resultatet sætter vi igen op i en tabel, og vi bemærker, at *omvendinger har samme intervaldifferens, men modsat fortegn*. Tilsammen giver de 0, hvad der jo passer med at omvendinger tilsammen udgør en oktav.

interval	intervalnavn	beregning	int.dif.	størrelse
G → C	kvart	1p – 1q	–1	0,4150375
D → C	lille septim	2p – 2q	–2	0,8300750
A → C	lille terts	2p – 3q	–3	0,2451125
E → C	lille sekst	3p – 4q	–4	0,6601500
H → C	lille sekund	3p – 5q	–5	0,0751875
Fis → C	formindsket kvint	4p – 6q	–6	0,4902250

Hvad angår beregningen af intervallernes størrelse, kan vi igen benytte os af, at omvendinger tilsammen giver en oktav – vi skal altså blot trække størrelserne i den første tabel fra 1 (som er oktavens størrelse qua tonal enhed – altså ikke dens intervaldifferens!), og et hastigt blik ned over den nye tabel vil bekræfte resultatet. Hvis vi som før ganger kvintens størrelse med intervaldifferensen, får vi tilsyneladende et forkert tal. For kvartens vedkommende får vi f.eks. som 0,5849625 · –1 = –0,5849625. Men det kan grafisk forklares ved, at vi på cirklen har bevæget os en kvint i *negativ* retning (*med* uret), og dermed kommer vi jo til det samme punkt, som hvis vi havde bevæget os en kvart i positiv retning (*mod* uret). Når vi kender kvartens størrelse, kan vi derfor også finde de øvrige intervaller i den nye tabel ved at gange dette tal med intervaldifferensen.

Den negative del af den tonale målestok

De foregående figurer og beregninger har alle været baseret på, at vi bevæger os *opad* gennem den tonale målestok. Men den tonale målestok begynder ikke med nulpunktet. Der findes ikke nogen højeste og heller ikke nogen dybeste tone (jeg taler ikke om det menneskelige øres begrænsninger), og nulpunktet er blot en vilkårligt valgt tone. Her har vi forklaringen på, at vi endnu ikke er stødt på tonenavne som F, B, Es, As, Des osv.. Når nulpunktet er defineret som tonen C, vil disse toner nemlig befinde sig på den *negative* del af den tonale målestok. Begyndelsen af denne ser vi her:



Figur 6

Den metode, vi anvendte, da vi beregnede intervaldifferenserne og størrelserne for intervallerne på den positive del af målestokken, kan vi også benytte her. Blot vil vi så få de negative intervaldifferenser beregnet, når vi går med uret, og de positive, når vi går mod uret.

Forudsat at nulpunktet er defineret som tonen C, gælder følgende huskeregel med hensyn til sammenhængen mellem tal og tonenavne: *Tallet svarer til antallet af fortegn i den durtoneart, der har den pågældende tone som grundtone; hvis fortegnet er et #, er tallet positivt, hvis fortegnet er et b, er tallet negativt.* Vi ser heraf, at musikkens fortegn er ækvivalente med matematikkens. I det hele taget er det allerede tydeligt, at *de musikalske betegnelser kan betragtes som substitutter for tal og andre matematiske begreber*. Men de egner sig som sagt ikke til at regne med, og deri ligner de romertallene. Forklaringen er i begge tilfælde, *at de ikke afspejler talsystemets, subsidiært tonesystemets egen immanente logik.*

De harmoniske skalaer på trin 1, 2, 3, og 5

Vi vil nu mere systematisk undersøge de harmoniske skalaers sammensætning og deres musikalske relevans, idet der fortsat henvises til fig.4. De tre første tilfælde vil musikeren normalt ikke betegne som skalaer, og det er unægtelig også yderst begrænset, hvor meget musik vi kan få ud af 1, 2 eller 3 toner. Men formelt set *er* der tale om skalaer.

Skalaen på første trin (den er ikke medtaget i fig.4) er simpelthen *oktavskalaen*; den kan i denne forbindelse sammenlignes med et metermål, hvor enheden ikke er underdelt i centimeter, eller en tommestok, hvor enheden ikke er underdelt i halve, kvarte, ottendedele osv.. Det er oktaven, som definerer skalaernes grundlæggende periodicitet, og derfor kan ingen af de efterfølgende skalaer tænkes uden oktavskalaen.

På andet trin deles oktaven af kvinten. Dermed har vi en skala, som set i lyset af den klassiske harmonilære omfatter de to hovedfunktioner: *tonika* og *dominant*. Som borduntoner klinger de f.eks. i skotsk sækkepibemusik med som en konstant påmindelse om, hvor tonesystemet har sit udspring. Sækkepibespilleren musicerer med andre ord sideløbende på den pentatone og den "bitone" skala! Foruden af kvinten består denne skala af kvarten, og i og med at den er kvintens omvending, har den samme intervaldifferens, men modsat, altså –1.

På tredje trin kommer *subdominanten* ind i billedet, og selv om vi normalt bruger både 7 og 12 toner, så finder vi allerede her grundlaget for akkorddannelser og en ikke alt for fordringsfuld harmonisering, nemlig de tre tonale hovedfunktioner. Den trestrengede græske lyre var stemt på denne måde, og det samme kan man sige om det wienerklassiske orkesters 3 pauker. Skalaen består nu af 2 kvarter og en stor sekund. Sidstnævnte er det interval, der bliver til overs, når vi trækker 2 kvarter fra oktaven, altså 0 – (–1) – (–1) = 2 (her er det vigtigt at holde styr på fortegnene!). Vi kunne også finde det som forskellen mellem en kvint og en kvart: 1 – (–1) = 2 (men vi kan selvfølgelig også bare se i to tabeller, vi allerede har beregnet!)

Først med den næste harmoniske skala, kendt som *den pentatone skala*, begynder musikken for alvor at udfolde sig. Fra musikhistorikeren ved vi, at denne skala tidligere har spillet en fremtrædende rolle i den vestlige musikkultur, og man kan stadig møde den i gamle salmemelodier, folkeviser og folkedanse. Det er allerede nævnt at den skotske folkemusik helt overvejende er pentaton. Det samme gælder i øvrigt den klassiske kinesiske musik – hvilket demonstrerer det skaladannende princips almengyldighed. Skalaens to intervaller, den lille terts og den store sekund, er defineret ved intervaldifferensen –3 og +2.

Den diatoniske skala og dens permutationer

Vi kommer nu til den skala, der er den mest benyttede i den vestlige musik, den diatoniske skala. Vi har allerede set, at den er sammensat af 5 store sekunder, defineret ved intervaldifferensen 2, og 2 små sekunder, defineret ved intervaldifferensen –5. Men hvorfor optræder den her i form af den lydiske skala?

Spørgsmålet giver anledning til at omtale de forskellige skalaer *permutationer*. Ved en permutation forstår man i matematikken en ombytning af en række elementer på en sådan måde, at rækkefølgen bevares. Antallet af permutationer svarer til antallet af elementer, og et fuldstændigt permutationsforløb kan gennemføres, idet vi vedvarende flytter det sidste element frem som nummer 1. Den diatoniske skalas permutationer er her opstillet i en tabel. Forløbet bliver særlig tydelig, når man fremhæver skalamønstret; der er her gjort ved at symbolisere de 5 store og de 2 små intervaller ved tegnene X og ○.

Den diatoniske skalas permutationer			
perm.grad	tonefølge	skalamønster	skalanavn
0	F – G – A – H – C – D – E – F	x – x – ○ – x – x – x – ○	lydisk
1	G – A – H – C – D – E – F – G	x – ○ – x – x – x – ○ – x	mixolydisk
2	A – H – C – D – E – F – G – A	○ – x – x – x – ○ – x – x	æolisk (mol)
3	H – C – D – E – F – G – A – H	x – x – x – ○ – x – x – ○	hypofrygisk
4	C – D – E – F – G – A – H – C	x – x – ○ – x – x – ○ – x	jonisk (dur)
5	D – E – F – G – A – H – C – D	x – ○ – x – x – ○ – x – x	dorisk
6	E – F – G – A – H – C – D – E	○ – x – x – ○ – x – x – x	frygisk

For at de forskellige tonefølger umiddelbart kan vække genkendelse hos musikeren, har jeg denne gang valgt at definere nulpunktet som tonen F. Dermed bliver der nemlig reelt tale om en permutation af klaverets hvide tangenter.

Hvilken permutation vi får genereret ved hjælp af det skaladannende princip afhænger altså af, hvor vi vælger at begynde skaladannelsen. I alle foregående eksempler (og specielt i fig.4), begynder skaladannelsen ved den tonale målestoks nulpunkt. Dermed dannes den lydiske skala. Ved at lade den begynde et andet sted, får vi dannet de øvrige skalaer. Begynder vi f.eks. ved –1, får vi dannet durskalaen.

De diatoniske skalaer fungerede oprindeligt som lukkede systemer, dvs. systemer, hvor det ikke er muligt at bevæge sig ud over de syv toner. I takt med at man erkendte eksistensen af flere musikalske relevante toner, opstod ønsket om at udnytte disse kreativt. Den logiske løsning ville være at basere musikken på den næste harmoniske skala, den kromatiske skala – ligesom udviklingen tidligere var gået fra en pentaton til en diatonisk musikkultur. Således fremstår tonesystemet også formelt set i dag. Men i realiteten opererer vi ikke længere med lukkede systemer (for også den kromatiske skala er jo også et lukket system). Vi har for længst erkendt, at tonesystemet er ubegrænset, og i stedet for at holde os inden for den kromatiske skalas rammer, benytter vi den teknik, der i musikalsk terminologi kaldes *modulation*. Ganske vist taler vi i den forbindelse om, at vi modulerer fra den ene *diatoniske* skala til den anden, men det betyder kun, at vi fremhæver *en bestemt periodicitet* inden for tonesystemet (for *enhver* af de harmoniske skalaer definerer en sådan periodicitet) – alt imens vi på musikkens vinger bevæger os gennem det uendelige tonale rum.

Og selv om vi reelt benytter det tempererede tonesystem, hvor der per definition kun forekommer 12 toner (og hvis beskrivelse vi snart kommer til), så skriver vi rent faktisk His og ikke C, når vi i modulationsforløbet kommer ud over den 12. tone på kvintskalaen – og vi fortsætter med at skrive Fisis, Cisis og Gisis og i subdominantisk retning Fes og Bes og Eses, idet vi dermed tilkendegiver, at vi godt ved, at kvintcirklen er et falsum, og at det tempererede tonesystem kun er en tilnærmelse til den tonale virkelighed – en tilnærmelse vi har måttet affinde os med, fordi et mekanisk konstrueret musikinstrument (der noget misvisende kaldes ”akustisk”) nødvendigvis må være begrænset til nogle relativt få toner.

Også de øvrige skalaer kan som allerede nævnt permuteres. F.eks. optræder den pentatone skala i 5 forskellige permutationer. Men eftersom den vestlige musiks begrebsapparat er udviklet længe efter, at pentatonikken havde udspillet sin rolle, har vi ingen betegnelser for disse varianter, og selv musikere gør sig sjældent klart, når de ind imellem konfronteres med pentaton musik, at der også her er lige så stor forskel på den ene og anden melodi som f.eks. på en durmelodi og en molmelodi.

Den naturligt definerede kromatiske skala

I modsætning til den tempererede kromatiske skala er den skala på 12. trin, der naturligt genereres ved det skaladannende princip, sammensat af to forskellige intervalstørrelser. Af fig.4 fremgår det, at det ene interval er defineret ved intervaldifferensen –5, og det er dermed identisk med den lille sekund. Det andet interval er defineret ved intervaldifferensen 7, og det er ikke et interval musikeren normalt bliver konfronteret med. De græske musikteoretikere kaldte det *apotomen*, hvilket betyder ’det afskårne’, dvs. det der bliver tilbage, når man fra den store sekund trækker en lille sekund:

$$2 - (-5) = 7$$

Bemærk i øvrigt, at hver af de harmoniske skalaer har en intervalstørrelse fælles med den foregående skala. På grundlag af denne iagttagelse vil jeg senere vise, hvordan den ene skala kan afledes af den anden, og hvordan vi på denne måde kan få genereret Schandorf-rækken ved hjælp af en simpel algoritme.

Apotomens størrelse finder vi på sædvanlig vis ved at gange intervaldifferensen med 0,5849625, hvorefter vi ser bort fra det hele tal foran kommaet. Resultatet bliver 0,0947375, altså relativ tæt på den lille sekunds størrelse: 0,0751875, og i hvert fald så tæt på, at det musikalske ører accepterer, at vi udligner forskellen mellem de to, sådan som det sker i det tempererede tonesystem. Af indlysende grunde giver det ingen mening at tale om den tempererede kromatiske skalas permutationer; men den opmærksomme lytter vil bemærke en forskel, når det handler om den naturligt definerede kromatiske skala (det kan efterprøves i programmet SKALAGENERATOREN).

17-tone skalaen og de ”højere” harmoniske skalaer

I hvert fald i den vestlige musikkultur har udviklingen tydeligvis bevæget sig fra pentatonik til diatonik og videre frem til kromatik – for nu at bruge den traditionelle terminologi. Vi kan altså vanskeligt komme uden om, at også denne udvikling på det helt grundlæggende plan er naturligt bestemt, i den forstand at man må tilegne sig det enkle, før man kan gå videre med det komplicerede.[13]

Spørgsmålet er nu, om denne udvikling vil fortsætte ud over den kromatiske skalas rammer? Det er nærliggende at slutte, at der efter ”den kromatiske æra” i musikhistorien vil følge en ny æra, baseret på 17-toneskalaen (musikeren har ikke navne for denne og de følgende ”højere” skalaer”, og jeg vil derfor blot identificere dem ved det relevante tal).

Her vil jeg først gøre opmærksom på, at 17-toneskalaen rent faktisk har spillet en rolle i den persisk-arabiske musikkultur. Mens den græske kulturarv misrøgtedes i de vestlige lande, blomstrede den videre i de østlige, og ikke mindst de persiske og arabiske musikteoretikere bragte forståelsen for tonesystemets opbygning et betydeligt skridt videre frem. Abdul Kadir, der levede i det 14. århundrede, beskriver detaljeret, hvordan de arabiske skalaer alle kan føres tilbage til en af 17 kvinttrin bestående skala. Skalaen som sådan benyttes altså ikke i musikalsk praksis, men de melodiske moduler, de såkaldte maquama, hvorpå den arabiske musik er baseret, er matematisk set alle delmængder af 17-toneskalaen.

---

[13] Det samme gælder, når vi taler om det enkelte menneskes musikalske udvikling, og jeg kan i den forbindelse ikke tilbageholde en bemærkning om, at den lave prioritering musikopdragelsen har fået i de fleste vestlige samfund i løbet af de sidste par generationer, har resulteret i en udbredt musikalsk analfabetisme. På den anden side er det forbavsende at iagttage, hvordan musikere fra f.eks. østasiatiske kulturer i løbet af kort tid har kunnet tilegne sig den indsigt i det tonale univers, som vi i Vesten møjsommeligt har erfaret os frem til gennem århundreder. Det ser jeg som en bekræftelse på tonesystemets og dets iboende princippers almengyldighed.

Også 17-toneskalaen har det ene interval fælles med den foregående harmoniske skala (den kromatiske); det andet interval fremkommer som differensen mellem sidstnævntes to intervaller, altså apotomen og den lille sekund:

$$7 - (-5) = 12$$

Dette nye interval er identisk med det *pytagoræiske komma*. Det bliver normalt defineret som differensen mellem 12 kvinter og 7 oktaver, og vi kan på målestokken i fig.5 finde det som intervallet yderst til højre. Efter den tidligere anvendte metode finder vi dets størrelse som 12 · 0,5849625 = 7,0195500, hvorefter vi fjerner tallet foran kommaet – hvad der jo netop er ensbetydende med, at vi først adderer 12 kvinter, hvorefter vi fratrækker 7 oktaver! Det pytagoræiske komma har altså størrelsen 0,0195500, dvs. lidt mindre en 1/50 af oktaven.

Fordi vi som før nævnt i realiteten allerede bruger et åbent tonesystem i den vestlige musikkultur, er der ingen grund til at forvente, at udviklingen fra pentatonik til diatonik og videre til kromatik på et tidspunkt vil fortsætte med indførelsen af 17-toneskalaen. Det afgørende er, at vi i det åbne system fornemmer *diatonikken* (der egentlig burde kaldes heptatonik!) *som et periodisk fænomen*, hvorimod vi næppe umiddelbart fornemmer kromatikken som et tilsvarende fænomen – og endnu mindre fornemmer vi umiddelbart en sekvens på 17 toner som periodisk.

Med de næste harmoniske skalaer, 29, 41, 53 osv., har vi definitivt overskredet den grænse, som jeg vil kalde *ørets tonale opløsningsevne*. I teorien er intervallerne stadigvæk musikalsk relevante, men i praksis spiller de ingen rolle – i hvert fald ikke for den umiddelbare oplevelse. Derimod kan vi inden for rammerne af disse ”højere” skalaer, modulere mellem de diatoniske skalaer, uden at det er nødvendigt at gå på kompromis, sådan som vi gør med det tempererede tonesystem.

Det er nemlig en fejl at tro, at ”pytagoræisk stemning” i sig selv er falsk. Men den kan ikke anvendes på et instrument med 12 tangenter per oktav. Hvis vi på et sådant instrument forsøger at spille *Das Wohltemperierte Klavier*, vil det være ulideligt at høre på. Toneomfanget i Bachs værk spænder fra Eses til Disis, dvs. over 27 toner. Hvis alle 27 toner skal klinge rent, skal instrumentet have mindst 27 tangenter per oktav.

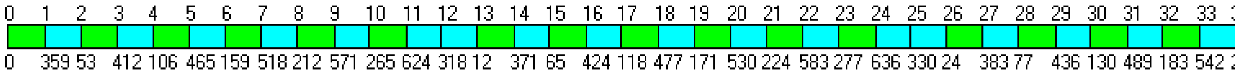
En anden ”højere” skala, der rent faktisk har været i søgelyset, er 53-skalaen – dog ikke fordi man har erkendt den som en skala, men fordi 53 kvinter er meget tæt på at være lig med 31 kvinter. Det betyder nemlig, at 53-skalaen kan ”tempereres” på samme måde som den kromatiske skala, men med en væsentlig bedre tilnærmelse til det ideelle (0,5849625), nemlig 31/53 = 0,5849057.

I slutningen af 1870’erne konstruerede en engelsk instrumentbygger faktisk et klaverlignende instrument med 53 tangenter per oktav. Det skete på grundlag af en artikel, som Robert H.M. Bosanquet havde skrevet om emnet: *The theory of the division of the octave, and the practical treatment of the musical systems thus obtained* (Proc. Roy. Soc. London XXIII, 390, 1875). Om det lykkedes nogen at lære at spille på instrumentet, melder historien ikke noget om!

Sammenfaldet mellem 53 kvinter og 31 oktaver var dog allerede blevet påvist to århundreder tidligere af den tyske matematiker Nicolaus Mercator (1620-87)[14]. Talforholdet er derfor også kendt som *Mercators temperatur*. Men faktisk omtales den samme opdagelse så tidligt som 40 år før vor tidsregning i et skrift af den kinesiske musikteoretiker King Fang. Som tidligere nævnt er det kinesiske musik pentaton, og det betyder, at den ligesom den vesterlandske musik er baseret på samme tonesystem, hvor oktaven og kvinten fungerer som tonale enheder – og det er derfor også de samme størrelser de kinesiske teoretikere opererer med.

[14] Mercator er bl.a. kendt for at have fundet rækkeudviklingen for den naturlige logaritme; han må ikke forveksles med den godt hundrede år ældre geograf og kartograf af samme navn.

Vi skal helt frem til kvint nr. 665 og oktav nr.389, før vi finder en endnu bedre tilnærmelse til musikkens gyldne snit: 389/665 = 0,5849624. I programmet SKALAGENERATOREN kan læseren selv eksperimentere med diverse harmoniske skalaer, herunder også 665-skalaen, som jeg mere for kuriositetens skyld viser begyndelsen af her, således som den genereres i programmet; tallene under skalaen er den indfoldede orden, hvoraf intervaldifferensen for de to intervaller også let kan findes.



Figur 7

En algoritme for Schandorf-rækken – den musikalske pendant til Fibonacci-rækken

Jeg vender nu tilbage til spørgsmålet, om det er muligt at påvise en lovmæssighed bag de harmoniske skalaers tilsyneladende tilfældige fordeling – altså bag den talrække jeg kalder *Schandorf-rækken*. Vi har allerede lagt mærke til, at to efter hinanden følgende harmoniske skalaer altid har det ene interval fælles, og en nærmere undersøgelse vil afsløre, at det andet interval altid er identisk med differensen mellem det største og det mindste interval i den foregående harmoniske skala. Det giver et fingerpeg! Kalder vi det største interval a, det mindste b og differensen c, sker der altså løbende en forskydning, idet det, der på det ene trin er b og c, på det næste trin bliver a og b. Der er her tale om et såkaldt iterativt forløb, således det typisk kendes fra fraktalgeometriens algoritmer. Den følgende opstilling viser forholdet mellem intervaldifferenserne for de første 7 trin af forløbet. For tydelighedens skyld er hver intervaldifferens noteret med fortegn, uanset om det er + eller – ; pilene markerer hvordan det, der på det ene trin er b og c, på det næste trin bliver a og b:

a	–	b	=	c
0	–	(+1)	=	(–1)
(+1)	–	(–1)	=	(+2)
(–1)	–	(+2)	=	(–3)
(–3)	–	(+2)	=	(–5)
(+2)	–	(–5)	=	(+7)
(+7)	–	(–5)	=	(+12)
(–5)	–	(+12)	=	(+17)

Der er, som vi tidligere har set, en sammenhæng mellem intervaldifferenserne og antallet af skalatrin, og det betyder, at opstillingen også afspejler forløbet med hensyn til sidstnævnte. Her kan vi dog komme nemmere til resultatet, for vender vi igen tilbage til fig.4, vil vi opdage, at de harmoniske skalaer er forbundet ved følgende simple regel: *antallet af intervaller i en polær skala er lig med antallet af intervaller i den foregående harmoniske skala plus antallet af store intervaller i samme*. Kalder vi det samlede antal af intervaller i to på hinanden følgende harmoniske skalaer S_n og S_{n+1}, og antallet af *store* intervaller i den førstnævnte a_n, kan dette kort udtrykkes således:

$$S_{n+1} = S_n + a_n$$

For de første led i rækken finder vi følgende talværdier:

store		lille		
1	+	1	=	2
2	+	1	=	3
2	+	3	=	5
5	+	2	=	7
7	+	5	=	12
12	+	5	=	17

Problemet er, at nogle gange er tallet til højre for lighedstegnet identisk med antallet af *store* interval i den efterfølgende skala, andre gange med antallet af *små* intervaller. Det er derfor nødvendigt at udforme algoritmen, så man på hvert trin også får beregnet de to intervallers størrelse. Gennemregningen af en algoritme kan som tidligere nævnt automatiseres i et computerprogram, og det er netop denne algoritme, der i SKALAGENERATOREN bruges i forbindelse med tabellen over de harmoniske skalaer. I den fuldt udbyggede version af programmet, beregnes de harmoniske skalaer for et vilkårligt snit.

Jeg har et par gange omtalt Fibonacci-rækken, der ligesom Schandorf-rækken blot er et specielt tilfælde af en uendelige mængde af rækker, der udvikler sig efter det samme princip. Når Fibonacci-rækken også kan beskrives på en enklere måde, skyldes det, at hvert tal i dette tilfælde er mellemproportional mellem det foregående og det efterfølgende tal (en følge af at deleforholdet er det gyldne snit), og det betyder igen, at tallet til højre for lighedstegnet i en tilsvarende opstilling, som den vi lige har set, *altid* er identisk med det mindre interval den følgende skala – vi behøver altså ikke først at beregne og sammenligne størrelserne. Formlen kan derfor i dette specielle tilfælde skrives:

$$S_{n+1} = S_n + S_{n-1}$$

– altså den ”klassiske” definition på Fibonaccirækken!

En ny forståelse af begrebet ’tonalitet’ – og en afsluttende bemærkning

Ordet *tonalitet* er af forholdsvis ny dato. Det dukker første gang op i den musikteoretiske litteratur i begyndelsen af 1800-tallet, men et forsøg på at give en mere stringent definition af begrebet ‘tonalitet’ finder vi først i den belgisk fødte musikteoretiker F.J.Fétis’ *Traité complet de la théorie et de la pratique de l’harmonie* fra 1844. Her definerer han tonalitet som “den totale sum af nødvendige successive og samtidige forbindelser mellem en skalas toner”. Som begreb har ordet for længst slået rod, men der har i de mellemliggende godt halvandet hundrede år været megen strid om, hvad det egentlig dækker. Carl Dahlhaus opregner i sin artikel ‘Tonality’ i *The New Grove Dictionary of Music and Musicians* (1980) ikke færre end syv forskellige definitioner af begrebet ‘tonalitet’. Ikke mindst har striden stået om, hvorvidt begrebet er specielt knyttet de to varianter af den diatoniske skala, der er kendt som til dur og mol. Mange teoretikere er af den opfattelse, at det i de såkaldte kirketonearter, som strukturelt set også er varianter af den diatoniske skala, handler om et andet ordningsprincip, og man opererer i denne forbindelse med begrebet ‘modalitet’ som modsætning til ‘tonalitet’. For de fleste musikere er tonalitet slet og ret synonymt med at musikken står i en bestemt toneart, C-dur, G-mol osv.

Jeg vil imidlertid gøre Dahlhaus’s ord til mine, når han siger: “If, like Fétis, one regards *tonalité* as a ‘principe régulateur des rapports’, one can distinguish between tonality as the essence of tonal relationships – as ‘form’ in the Aristotelian sense – and note content as the mere ‘material’ of a tonal structure. The distinction is one that can be applied to keys as well as to tonal systems. In this light, ‘tonality’ becomes the underlying element of a tonal structure, the effective principle at its heart.”

Det matematiske ordningsprincip, jeg har beskrevet i de foregående kapitler, er netop musikkens “effective principle at its heart”, og tonalitet er slet og ret den musikalske betegnelse for dette ordningsprincip.

Lidt populært udtrykt kan man sige, at tonalitet er et udtryk for den ”kraft”, der i en musikalsk sammenhæng tvinger tonematerialet ind i nogle bestemte strukturer eller mønstre. Der er i virkeligheden tale om en ”kraft” i samme betydning, som når vi taler om en naturkraft, og begrebet tonalitet kan til en vis grad sammenlignes med begrebet gravitation. Her er der også tale om en kraft, som tvinger stof i bevægelse til at følge bestemte baner og til at arrangere sig i bestemte strukturer eller mønstre. I fysikken har man for længst erkendt, at ordet kraft i virkeligheden dækker over et matematisk princip; i musikteorien er det derimod stadig den almindelige opfattelse, at skalastrukturerne er bestemt af et æstetisk princip, og at ordet tonalitet således kun dækker over en slags spilleregler, vi selv har vedtaget.

Med påvisningen af at der er tale om et matematisk princip, og med påvisningen af at dette princip kan manifestere sig på uendeligt mange måder, hvoraf tonesystemet blot er et specielt tilfælde (jeg henviser igen til SKALAGENERATOREN), skulle denne opfattelse nu definitivt være skrinlagt. Jeg forestiller mig egentlig ikke, at matematikerne vil overtage begrebet ’tonalitet’, men i så fald bør generatorintervallet tilføjes som indeks for at tilkendegive hvilket system, det i det givne tilfælde drejer sig om. Det samme gælder tonesystemet. Sådan som det menneskelige øre og sanseapparat er ”tunet”, er det *kvint-tonalitet*, der fungerer musikalsk. Og dermed er alt egentlig sagt! Pentatonik, diatonik, kromatik, dur og mol, kirketonearter osv. osv. – det er altsammen tonale strukturer inden for kvint-tonalitetens rammer.

Det er også inden for kvint-tonalitetens rammer, musikken har udfoldet sig siden oldtiden. Faktisk er det kun inden for de sidste hundrede år, man har forsøgt at skabe musik *uden* for disse rammer. Og spørgsmålet er, om det overhovedet bør kaldes musik! Bør ordet ’musik’ ikke netop være forbeholdt den kunstart, som i mere end to tusind år har øvet sin forunderlige virkning og fortsat er i stand til at gøre det – *for al ægte musik er tidløs*! Så kan man betegne det andet som *lydkunst*. Musik er også en form for lydkunst, men omvendt er det langt fra al lydkunst, der er musik! Dermed afviser jeg ikke, at andre former for lydkunst kan bibringe lytteren en oplevelse, den være sig af æstetisk eller anden art. Men en musikalsk oplevelse i dette begrebs oprindelige betydning er det ikke!

Med disse afsluttende bemærkninger vil jeg blot antyde, at musikteori ikke kun har akademisk interesse. Den hjælper os til at forstå, hvad musik i sit inderste væsen handler om. Den stiller musikken som kunstart i et nyt lys. Og den giver os mulighed for på et objektivt grundlag at diskutere ting, hvorom det ellers hedder, at ”om smagen kan man ikke diskutere”.